Math
1050

Lukas Vochs
Ingenieur und Architekt, auch der kaiserl. Akademie freyer Künste und Wissenschaften Ehrenmitglied,

Theorie und Praxis der Trigonometrie.

Zum Gebrauche,
angehender
Feldmesser, Ingenieur, Architekten, Maurern, Zimmerleuten, und allen welche mit mechanischen Arbeiten umgehen, und ihre Arbeiten aus richtigen Gründen bestimmen wollen.

Mit VII. Kupfertafeln.

Augsburg,
bey Matthäus Riegers sel. Söhnen. 1779.

Vorbericht.

Daß die Trigonometrie schon in den ältesten Zeiten bekannt gewesen, daran ist nicht zu zweifeln. Denn wie hätte man wohl können die Erscheinungen am Himmel so genau bestimmen, wenn man keine Kentniß von der Trignometrie gehabt hätte. Ja! die Geographie würde uns ohne diese Wissenschaft noch bis diese Stunde unbekannt, und die praktische Geometrie, würde zu keiner so großen Vollkommenheit gekommen seyn, als sie jetzo ist. Denn ob man schon die Winkelmeßinstrumenten zu unsern Zeiten viel vollkommner und verbesserter verfertiget, so kann man,

wenn man nur bloß mechanisch damit zu Werke gehet, doch leichtlich Fehler begehen, welche man, wenn man trigonometrisch verfährt, vermeiden kann.

Ueberhaupt ist die Trigonometrie bey allen Wissenschaften der anwendenden Mathematik mit Nutzen und großem Vortheil zu Gebrauchen.

Denjenigen zu Lieb, welche von dem Anfang und Wachsthum dieser Wissenschaft eine Nachricht haben möchten, will ich in der Kürze selbige mittheilen, und diejenige Schriften anzeigen, wie sie von Jahrhundert zu Jahrhundert heraus gekommen.

Es ist unzweifelhaft, daß die erste Erfindung den scharfsinnigen und klugen Griechen zu zuschreiben seye. Der erste welcher sich durch seine Schrift bekannt gemacht, ware Hipparch, ein berühmter Astronom von

Nicäa,

Nicäa, so um die Zeiten des Ptolomäi Evergetä lebte. Er hat zwölf Bücher de Triangulis geschrieben, welche aber verlohren gegangen. Nach etlich hundert Jahren, und zwar im zweyten Jahrhundert nach Christi Geburt stunde Claudius Ptolomäus auf, er war von Peluß und florirte zu Alexandrien. Er machte in dem ersten Buch seines Almagesti einen Auszug aus des Hipparchs Büchern, welche man noch hat.

Mit diesen ware man zufrieden, bis ungefehr vor 300. Jahren, nemlich im fünfzehenden Jahrhundert sich Georg Peuerbach, und sein würdiger Schüler Johann Müller, sonsten Regiomontanus genannt, von Königshofen in Franken, ein Nürnbergischer Astronom, um die Trigonometrie verdient gemacht haben. Ersterer hat die Lehre de sinubus & chordis untersucht, und den

Anfang mit denen Tabulis sinuum gemacht, der zweyte aber hat die Arbeit seines Lehrers mit einer unbeschreiblichen Mühe fortgesetzt. Anfangs hatte er in den Sinus-Tafeln den Radius oder Sinus totus nicht auf 10. Millionen, sondern nur in 60 tausend Theile getheilet. Sein Buch welches er herausgegeben, und 1464 gedruckt worden, handelt von den Dreyecken, so nachgehends 1533 in fol. heraus kam, und worinn er sich als der erste gezeiget, welcher den Radius bis auf 10.0000000 genau eingerichtet hat.

Diese mühsame Rechnung ist auch in dem sechzehnten Jahrhundert von Philipp Landsberg einem Prediger in Seeland, so in einem hohen Alter 1632 verstorben, in seinem Buch Geometria Triangulorum, welches 1591 heraus kam, fortgesetzt worden, in welcher Schrift er sowol Trigono-

metriam planam als Sphæricam, und die Verfertigung der Sinuum und Tangentium deutlich erkläret. Auch Georg Joachim, sonsten Rheticus oder Graubinder genannt, schrieb einen Traktat, de Doctrina Triangulorum so Pitißcus 1673 heraus gab.

Endlich trat im siebenzehnten Jahrhundert, der berühmten Johann Neper Freyherr von Merchiston, ein Schottländer auf, welcher zu erst die Logarithmen in seinem herausgegebenen Canone mirifico Logarithmorum zu Edimburg 1614 edieret, bekannt gemacht haben solle. Wiewol aber einige diese erste Erfindung einem Deutschen Jost Byrge zuschreiben, der nach Kepplers Zeugniß, seine Geheimnisse, besonders die Logarithmen verborgen hielte, und nicht auskommen lassen wollte. Des Nepres Canonem hat hernach Ursinus, Brigge und Ulacq ansehnlich vermehret,

und verbessert. In eben diesem Jahrhundert hat sich auch ein Professor zu Bologna Namens Bonaventura Cavalerius 1643 durch seine Trigonometriam planam & sphæricam, wie auch der große Englische Philosoph Isaac Newton in einem vortreflichen trigonometrischen Werk von 1658; ingleichem ein anderer Engeländer Norword 1651 um die Trigonometrie verdient gemacht.

In gegenwärtigem Jahrhundert haben sich ein besonders Lob erworben Jakob Gooden ein Jesuit, der 1704. Trigonometriam planam und sphæricam zu Lüttich heraus gab. Heinrich Vilson hat 1715 in englischer Sprache, in seinem Schifbuch, auch einige Regeln vorgetragen, durch welche man die trigonometrische Rechnungen ohne die Tabellen verrichten kann. Ein anderer Jesuit Cresa ließ 1720 zu Prag eine sehr gute Schrift

von

von der Trigonometrie drucken. Der Freyherr Christian von Wolf, hat sowol in seinen Anfangsgründen als denen Elementis, sowol von der ebenen als sphärischen Trigonometrie gehandelt, und Taflen mitgetheilet. Nur ist es Schade daß derselbe diesen wichtigen Theil der Mathematik gar zu kurz und unvollständig vorgetragen, und die neuern Entdeckungen in den neuen Auflagen seinen Schriften nicht eingerücket hat. Dieses aber ist von denen Herren Kästner, Segner, Clem, Karst rc. in ihren Schriften geschehen.

Nun bin ich auch verbunden anzuzeigen, warum denen eben angezeigten Schriften nicht gefolget; sondern bey der Trigonometrie mit Zahlen geblieben, und die meisten Rechnungen ausgesetzt habe. Die Ursache ist, weil ich mir allezeit vorgenommen, denjenigen mit möglichster

Deutlichkeit eine Wissenschaft vorzutragen welche sich denen Studien nicht eigentlich gewidmet haben, und von denen die Trigonometrie ohne deme als eine schwere Wissenschaft gehalten wird.

Besonders aber ist meine Absicht, die gemeine Feldmesser, welche diese Wissenschaft zu wissen vor unnöthig achten, aufzumuntern, daß sie neben ihren mechanischen Messuugsarten, sich auch die Trigonometrie bekannt machen möchten, damit sie hinführo nicht so im Finstern tappen, und richtigere Vermessungen liefern möchten. Es haben aber nicht nur diese die Anwendung der Trigonometrie nöthig; sondern auch diejenige können solche nicht entbehren, welche in der Kriegs- und bürgerlichen Baukunst, in der Mechanik uud andern dergleichen Wissenschaften, was rechtschaffnes wissen wollen.

Selb-

Selbsten in der Zimmermanns-kunst kann die Trigonometrie bey dem Schiften angebracht werden. Ich will zum Beweiß nur ein einziges Beyspiel beysetzen. Wenn man die Länge des Gradsparrns erforschen will, so wird derselbe auf die mechanische Weise der Zimmerleuten gefunden; wenn man aus dem Mittel des Balkens, wo der Walmen anlauft den Stich bis zu Ende des Sparrnlochs am Gradstich nimmt, und dieses Maaß auf dem Lehrgespärr, aus der Mitte hinaus trägt; darnach man den Gradsparren anziehet, und dardurch seine Länge erhält; wie ich in meiner Anleitung zu Verfertigung schöner Zimmerwerksrisse und deren Zugabe, auf verschiedene Arten gewiesen habe. Es läßt sich aber dieses durch die Trigonometrie geschwinder und gewisser bewerkstelligen.

Denn wir haben drey bekannte Stücke, 1.) die Höhe des Daches; 2) die Länge des Stiches vom Mittel des Balkens, bis zu Ende des Sparrnlochs am Gradstich. 3.) Den Winkel welchen die Höhe des Daches mit dem Balken macht, so ein gerader oder rechter Winkel ist. Zum Beyspiel, die Höhe des Daches sey 22 Fuß 2 Zoll.

Der Stich vom Mittel bis zu Ende des Sparrnloches am Gradstich 25 Schuh 4 Zoll. Da man denn nach folgenden Sätzen des Gradsparrns Länge finden kann.

Höhe des Dachs		Sin. tot.		Länge des Stichs.
22' 2''		90°		25' 4''
2.3463936	—	10.0000000	—	2.4048337
				10.
				12.4048.337
				2.3463 936
48 Gr. 50. M. Long. Tang.				10.0584401

Als-

Alsdenn sagt man weiters:

Sin.

48°50′	2′54″	90°
9.8766785 —	2.4048337 —	10.0000000
		2.4048337
		12.4048337
		9.8766785
		2.5281552

kommt für die Länge des Gradsparrs, jedoch ohne Zapfen 33 Fuß 7 Zoll.

Und so kann man auch die Länge des mittlern Schiftsparrens finden, wenn der Walmen entweder steiler oder flächer als die Seite des Daches ist.

Wie die Trigonometrie bey der bürgerlichen Baukunst, besonders bey Berechnungen der runden Gebäuden zu gebrauchen, hat der jüngere Herr Sturm in seinen Schriften angemerket. Der Verfasser hat in seiner Architectura Hydraulica gewiesen, wie man sie bey Erfindung der Schaufelweiten eines Wasserrads anwenden kann.

Kurz

Kurz, die Trigonometrie hat durch die ganze angewandte Mathematik ihren großen Nutzen. Ich habe aber hier nur von den Berechnungen bey ebenen Dreyecken gehandelt, weil die sphärische Trigonometrie zur höhern Mathematik gehöret, welche diejenigen vor welche ich geschrieben, nicht zu erlernen verlangen werden. Uebrigens wünsche daß sich diejenige, welchen diese Schrift zu Lieb geschrieben worden, fleißig darnach üben; so werden sie baldigen Nutzen in ihren Profeßionen davon verspüren, welches meine einzige Absicht ist.

Schriebs zu Augsburg am Osterdienstag 1779.

der Verfasser.

I. Erklärung.

§. 1.

Die Trigonometrie ist eine Wissenschaft, welche lehret aus drey gegebenen oder bekannten Stücken eines Dreyecks, die übrige dreye durch Rechnung zu finden.

Anmerkung.

§. 2.

In einem jeden Dreyeck sind sechs Stücke, als drey Winkel und drey Seiten. Von diesen sechsen müssen entweder zwey Winkel und eine Seite oder zwey Seiten und ein Winkel, oder alle drey Seiten bekannt seyn. Aus den drey gegebenen Winkeln eines Dreyecks aber, kann der Werth der drey Seiten nicht gefunden werden, weil in zwey ähnlichen Dreyecken wohl die Winkel ein ander gleich, aber auf die Gleichheit der Seiten nicht zu schließen ist. Derowegen kann man wohl aus dreyen gegebenen Winkeln die Proportion der Seiten, aber nicht derselben Werth finden.

2. Erklärung.

§. 3.

Es ist aber ein bekanntes Eck oder Winkel derjenige so nach seinen Graden und Minuten angezeiget ist. Eine bekannte oder gegebne Linie aber ist eine solche deren Länge mit Ruthen oder Klaftern, Schuhen und Zollen benennet ist.

3. Erklärung.

§. 4.

Aus der Geometrie ist bereits bekannt daß der Cirkul in 360 Theile getheilt wird, davon ein solcher Theil Grad genennt wird, und wird mit einer ° bezeichnet, z. B. 25°, will sagen 25 Grade. Ein solcher Grad hält wieder 60 kleinere Theile in sich, welche man Minuten heisset, und mit dem Zeichen des Accents ′ bemerket werden; z. B. 15′, bedeutet so viel als 15 Minuten.

4. Erklärung.

§. 5.

Der Bogen ist ein Theil des ganzen Cirkuls, welcher von zweyen Linien eingeschrenkt wird, so einen Winkel machen, welcher entweder

der ein spitziger a c b, oder ein rechter a b g, oder ein stumpfer f b c seyn kann. Siehe Fig. I. Kufert. I.

Anmerkung.

§. 6.

Der rechte oder gerade Winkel a b g hält 90 Grad. Der spitzige a c b, weniger, und der stumpfe f b c mehr als 90 Grade.

5. Erklärung.

§. 7.

Die Chorde oder Subtense eines Bogens, ist die Linie so von einem Ende des Bogens zum andern gezogen wird, wie Fig. I. c h i, die Chorde des Bogens c g i ist.

6. Erklärung.

§. 8.

Sinus wird die gerade Linie genannt, welche man vom Ende des Bogens auf den Durchmesser fället. In der Fig. I. ist e c der Sinus des Bogens c a, oder des Winkels a b c.

Es ist aber dieser Sinus e c, auch der Sinus des Bogens c g f, oder des stumpfen Winkels c b f, derowegen folget, daß, wenn man den Sinus des stumpfen Winkels suchen will, so müssen die Grade oder Minuten, von 180 abgezogen werden, weil der halbe Cirkul derer so

viel hat. Der Rest giebt hernach den Sinus welcher in den Tabellen gesucht werden muß, und statt des stumpfen Winkels dienet.

7. Erklärung.

§. 9.

Sinus des Complements, oder der Cosinus ist die Linie c h, welche aus dem Punkt c, wo der Sinus e c den Bogen berühret, mit dem Radius a b parallel gezogen wird.

8. Erklärung.

§. 10.

Sinus versus oder der Pfeil Sinus ist die Linie a c, so zwischen dem Sinus c e und dem Bogen a c lieget, und ein Stück des Durchmessers ist.

9. Erklärung.

§. 11.

Sinus totus, wird der Radius oder der halbe Durchmesser des Cirkuls, als a b oder b g, genennet, und ist Sinus totus, sowol des Bogens a c g, als auch des rechten Winkels a b g, und in denen Logarithmischen Tabellen mit 10000000 ausgedruckt wird.

10. Erklärung.

§. 12.

Der Tangent, ist diejenige Linie, so zu Ende oder dem äußersten Punkt des Radius perpendikular

dikular errichtet wird; als a d, und ist der Tangent des Bogens a c, oder des Winkels a b c, und wird der Tangent genannt, weil er den Bogen a c berühret.

11. Erklärung.

§. 13.

Der Tangent des Complements, oder der Contangent des Winkels a b c, ist die Linie g k, welche mit dem Durchmesser a f parallel läuft.

12. Erklärung.

§. 15.

Der Sekant des nemlichen Winkels a b c ist die Linie b d, und hat den Namen von Durchschneiden, weil diese Linie den Bogen a g in c durchschneidet.

13. Erklärung.

§. 16.

Das Complement eines Bogens ist die Erfüllung, so dem bekannten Bogen, von 90 oder 180 Graden abgehet, und also kein viertels oder halber Cirkul ist. Deswegen ist das Complement zweyerley, einmal wenn der bekannte Bogen kleiner als 90 Grade, so ist sein Complement, dasjenige Cirkultrum so zu 90° noch fehlet. Z. B. der Bogen a c des Winkels a b c halte 50 Grade, so ist sein Complement der Bogen c g von 40 Graden: denn wenn man 50

von 90 abziehet, so bleibet die Differenz 40 übrig.

Zweytens, kann der Bogen grösser seyn als ein Quadrant, in diesem Fall wird derjenige Bogen, welcher ihme noch an dem Halbcirkul abgehet sein Complement genennet: z. B. der Bogen f c seye 130 Grade, so wird sein Complement der Bogen a c von 50 Graden: denn weil 130 von 180 abgezogen werden müssen, so bleibt vor die Differenz 50 übrig.

Von denen Grundsätzen der Trigonometrie.

1. Grundsatz.

§. 17.

In einem jeden Dreyeck oder Triangel, es mag hernach recht, spitz oder stumpfwinklicht seyn, haben alle drey Winkel zusammen 180 Grad. Wenn dahero zwey Winkel gegeben oder bekannt, kann man auch den dritten, unbekannten finden. Z. B. ein Winkel habe 42, und der andere 55 Grade; so darf man nur diese zwey bekannte Winkel zusammen addiren, kommen 97 Grade, diese von 180 Graden, als so viel ein halber Cirkul hält, abgezogen, ergeben sich 83 Grad, und so groß ist der dritte, oder unbekannte Winkel.

Anmer-

Anmerkung.

§. 18.

Wenn aber von denen bekannten Winkeln einer 90 Grad hält, so wird der bekannte Spitzwinkel von 90 abgezogen. Z. B. es sey ein Spitzwinkel so bekannt 36 Grad, der bekannt rechte oder gerade Winkel 90, ziehet man die 36 von 90 ab, so bleiben 54 Grad für den zu suchenden Winkel.

2. Grundsatz.

§. 19.

Wenn ein Dreyeck zwo gleiche Seiten hat, so hat es auch zwey gleiche Winkel über ihrer Grundlinie oder Basis, und im Gegentheil wenn das Dreyeck zwey gleiche Winkel hat, so hat es auch zwey gleiche Seiten.

Beweiß.

§. 20.

Die Seiten a b und b c Fig. 2. Kupfert. I. sind einander gleich, deswegen sind auch die Winkel a und c einander gleich oder von gleicher Größe, und im Gegentheil wenn die Winkel a und c von gleicher Größe sind; so müssen auch die Seiten a b und b c von gleicher Länge seyn.

3. Grundsatz.

§. 21.

Wenn auf eine andere Linie, eine gerade oder schröge Linie gezogen wird, so sind die zwey

Winkel, welche sie machen, so groß als 180 Grad.

Beweiß.

§. 22.

Wenn Fig. 3. aus o ein halber Cirkulkreiß r s t beschrieben wird, so ist r s das Maaß des Winkels o und s t das Maaß des Winkels u, werden nun diese zwey Winkel o und w zusammen addiert, so erhält man das Maaß von 180 Graden: z. B. der Winkel o halte 150, und der Winkel u 30, so geben beyde zusammen 180 Grad.

4. Grundsatz.

§. 23.

Wenn eine gerade Linie durch zwey Parallellinien gezogen wird, so macht selbige die Wechselwinkel (augulos alternos) gleich groß; ingleichem den inwendigen Winkel, eben so groß als den auswendigen auf eben derselben Seite, und endlich sind beyde innern Winkel auf einer Seite so groß als zwey rechte oder gerade Winkel, oder 180 Grad.

Beweiß.

§. 24.

Die zwey Parallellinien sind a b und e d, Fig. 4. welche durch die Querlinien e f durchschnitten werden. Diese Durchschneidung verursachet, daß die Wechselwinkel g h und i k von gleicher Größe oder einander gleich. Und der

äußere

äußere Winkel l ist eben so groß als der innere Winkel h. Die beyde innern Winkel i und g machen zusammen 180 Grade.

5. Grundsatz.

§. 25.

Wenn man eine Seite eines Dreyecks verlängert, so ist der äußere Winkel eben so groß, als die beyde innern, so ihnen gegen über liegen, auch sind alle drey innern Winkel eines jeden Dreyecks eben so groß als zwey rechte, oder als 180 Grad.

Beweiß.

§. 26.

In dem Dreyeck Fig. 5. Kupfert. I. verlängere man die Linie m o in p, so wird die äußere q, so groß seyn, als die beyde innere m und n zusammen. Alle drey Winkel m n o aber 180 Grad halten. Wenn man dahero zwey Winkel bekannt hat, und man will den dritten finden, darf man nur die Summa der zwey bekannten von 180 abziehen, so wird sich der dritte Winkel ergeben.

6. Grundsatz.

§. 27.

In jedem rechtwinklichten Dreyeck, ist das Quadrat der längsten Seite so groß, als die Quadrate der beyden andern Seiten, so den rechten Winkel machen.

Beweiß.

§. 28.

Aus der Fig. 6. Kupfert. I. kann solches begriffen werden: denn wenn nach dem Euklid nach der 47 prop. I. Buchs, sich die drey Seiten des rechtwinklichten Dreyecks verhalten, wie 3.4.5. so ist klar, daß das große Quadrat A so nach der Hypothenus gemacht, und eine Seite in 5 gleiche Theile getheilt wird, eben so groß ist, als die Quadrate des Cathets, wo eine Seite in 4, und der Basis, wo eine Seite 3 Theile hat. Denn wenn man das Quadrat A der Hypothenus 5, in sich selbst multiplicirt kommt 25; und das Quadrat des Cathets B 4 in sich selbsten multiplicirt giebt 16; das Quadrat C aber der Basis von 3 geben 9. Zählt man 16 und 9 zusammen, so erhält man auch 25, deswegen ist klar daß die zweyen kleinere Quadrate eines rechtwinklichten Dreyeckes eben so groß; als das Quadrat A der größten Seite oder der Hypothenus seye.

7. Grundsatz.

§. 29.

In allen fachlinichten Dreyecken, verhält sich die rechte Seite gegen die Linke, also auch verhält sich der Sinus des linken Winkels, gegen dem Sinus des rechten Winkels, und so auch verkehrt. Es sind aber die Dreyecke entweder spitz, recht oder stumpfwinklicht.

1. Beweiß.

§. 30.

Es seye das spitz oder scharfwinklichte Dreyeck e f g, Fig. 7. Kupfert. I. davon die zwey spitzige Winkel e und g sind. Aus dem Punkt g, wird mit g f, so vor den Radium angenommen wird, ein Bogen f i beschrieben. Alsdenn wird auch aus e mit der Weite e k so g f gleich ist, der Bogen k l gerissen. Von f nach h wird auf die Linie e g, die Perpendikulare f h gefällt, welche der Sinus des Bogens f i ist; und aus k nach m, wird die Perpendikulare k m gefällt, so ist solche der Sinus des Bogens k l. Deswegen kann man schliessen wie sich verhält die rechte Seite f g, zu der Linken e f, also verhält auch der Sinus k m des linken Winkels e, zu dem Sinus des rechten Winkels g: denn weil in dem Dreyeck e f g, zwey Parallellinien f h und k m sind, also stehen auch e f zu f h, wie e k zu k m in Proportion. Und weil f g, gleich der Linie e k, so verhält sich e f zu f h, wie sich verhält f g zu k m; und im Gegentheil wie f g zu f e, so auch k m zu f h.

2. Beweiß.

§. 31.

Wenn das Dreyeck n o p Fig. 8. Kupfert. I. ein rechtwinklichtes ist: so verhält sich die rechte Seite o p gegen der linken n p, so auch der Sinus r s des linken Winkels n, zu dem Sinus o p des rechten Winkels o. Weil nun die zwey Si-

nus o p und r s gegen einander parallel, so ist zu schließen, daß wie sich n p zu p o verhalte; also verhalte sich auch n r zu r s. Und weil o p mit r n gleiches Maaß hat, darum verhält sich auch n p zu p o, wie p o zu r s: und im Gegentheil wie sich verhält o p zu n p, also r s zu o p.

3. Beweiß.

§. 32.

Ist aber das Dreyeck u x w stumpfwinklicht, wie Fig. 9. Kupfert. I. so schließt man also: wie sich die rechte Seite w x verhält zur linken u w, also verhält sich auch der Sinus des linken Winkels b c, zu dem des rechten w y. Denn wenn die Linie u y bis z verlängert wird, so ist der Winkel w z x gleich dem Winkel w x z, und weil diese einander gleich, so müssen nothwendig auch die Linien w z und w x einander gleich seyn, und weil die Linie w x gleich der Linie u b, so ist auch w z gleich der Linie u b: w y aber ist der Sinus des Winkels z. Deswegen spricht man wie sich verhält die rechte Seite w z zu der linken u w, also verhält sich der Sinus des Winkels b c, zu dem Sinus des rechten w y: und weil w x gleich ist w z, so ist auch w y der Sinus des rechten Winkels w x u: deswegen verhält sich auch die rechte Seite w y zur linken u w, und also auch der linke Sinus b c zu dem rechten w y.

8. Grundsatz.

§. 33.

Die Sinus, Tangenten und Sekanten der Bogen, sind ebendieselbe zu den Winkeln die sie messen. Z. B. Die Linie c e Fig. I. ist der Sinus des Bogens a c, und so auch des Winkels a b c, weilen beyde gleich viel Maaß haben.

9. Grundsatz.

§. 34.

Der Sinus eines spitzigen Winkels, ist auch der Sinus des stumpfen Winkels, so neben dem spitzigen anlieget: also ist c e Fig. I. der Sinus von a b c, als auch von f b c, weil beyde Bogen einen gemeinschaftlichen Durchmesser a f und den gemeinschaftlichen Mittelpunkt b haben.

10. Grundsatz.

§. 35.

Der Sinus versus eines jeden Bogens oder Winkels ist der Unterscheid (Differenz) zwischen dem Sinus totus und Sinus complementi oder Cosinus des nemlichen Bogens oder Winkels: z. B. e a Fig. I. ist die Differenz zwischen a b und b e gleich c h.

11. Grundsatz.

§. 36.

Wenn in einem rechtwinklichten Dreyeck die eine Seite Radius oder Sinus totus ist, so wird

die

die andere Seite der Tangent des gegenüberstehenden Winkels. Z. B. in dem rechtwinklichten Dreyeck a d b, Fig. I. seyn b a der Radius oder Sinus totus, so ist a d der Tangent des Winkels b.

12. Grundsatz.

§. 37.

Wenn aber in dem rechtwinklichten Dreyeck, die Hypothenus der Radius oder Sinus totus ist, so sind die Seiten der Sinus rektus der entgegen stehenden Winkeln: z. B. in dem Dreyeck b c e Fig. I. seyn b c der Radius, so ist c e der Sinus des Winkels b, und b e der Sinus des Winkels c.

Von denen Lehrsätzen.

1. Lehrsatz.

§. 38.

Eine jede Sehne oder Chorde ist noch mal so groß als der Sinus des halben Bogens, welchen sie abschneidet.

Beweiß.

§. 39.

Wenn man den Bogen d b c, Fig. I. Kupf. II. von der Sehne d l abschneidet, oder in b in zwey gleiche Theile theilet, und von c nach d und l die

die Radios ziehet; so sind in den beyden Dreyecken d c e, und l c e, die Winkel d c e und e c l gleich, und so auch die Radien c d und c l; c e aber ist beyden gemein. Deswegen sind auch d e und e l einander gleich, und die Winkel c e l und d e c sind gerade Winkel. Da nun d e die Helfte von d l und gerade Winkel mit c b machet; so ist der Sinus rektus des Bogens d e, die Helfte von der Sehne d l.

2. Lehrsatz.

§. 40.

In einem jeden Dreyeck verhalten sich die Seiten gegen einander, wie die Sinus der Winkel, zu denen ihnen entgegen gesetzten Seiten.

Beweiß.

Wenn um das Dreyeck a b c Fig. 2. Kupfert. II. ein Cirkul beschrieben wird, und aus den Ecken des Dreyecks nach dem Mittelpunkt des Cirkuls die gerade Linien a d, b d und c d gezogen werden: so folgt, weil die Winkel a d b und a c b über einen gemeinschaftlichen Bogen a b stehen, daß der Winkel a c b gleich der Helfte von a d b seye. Und da der Bogen a b, das Maaß des Winkels a d b ist; so folgt, daß die Helfte von a b, das Maaß des Winkels a c b seyn. Weil nun die Helfte von a b der Sinus des halben Bogens a e b ist, so ist auch $\frac{1}{2}$ a b der Sinus des Winkels a c b. Und auf diese Weise wird auch von den übrigen Seiten

des

des Dreyecks bewiesen, daß ihre Helfte allezeit der Sinus des gegenüberstehenden Winkels seye. Wie sich aber die halben Seiten gegeneinander verhalten, so verhalten sich auch die ganzen gegen einander. Deswegen verhalten sie sich, wie die Sinus der gegenüber liegenden Winkel.

3. Lehrsatz.

§. 42.

In einem jeden Dreyeck ist das Verhältniß der größten Seite oder der Grundlinie, zu den zwoen andern, zu der Differenz derselben, zu der Differenz der Stücke, in welche die Grundlinie, durch die Perpendikularlinie welche aus der obern Spitze des Dreyecks herab fällt, getheilet wird.

Beweiß.

§. 43.

Man ziehet aus a, Fig. 3. Kupfert. II. mit dem Radius a b, welcher die kleine Seite des Dreyecks ist, einen Cirkulkreiß. Die Linie a c verlängere bis an diesen Cirkulkreiß in d, so wird die Summe c d den beyden Seiten c a und a b gleich, denn a b ist gleich a d. Und so ist auch c e die Differenz der beyden Seiten, weil a b gleich ist a e. Läßt man nun aus a auf die Grundlinie oder Basis b c eine Perpendikularlinie a g fallen; so erhält man die Stücke b g, und g c, welche den Perpendikul von der Grundlinie abschneiden; weil nun b g gleich f g ist, so

ist

ist f c die Differenz dieser Stücke. Endlich ziehe man die Sehnen e f und d b.

§. 44.

Weil der Winkel c b d die Helfte des Bogens f e d zu seinem Maaß hat; und der Winkel f e d das Maaß von der Helfte des Bogens f b d hat, beyde Winkel aber das Maaß die Helfte vom ganzen Cirkul haben, und also zwey rechte ausmachen. Da nun der Winkel f e d, mit dem so neben ihm liegt c e f auch zwey rechte Winkel machen; so ist folglich der Winkel c b d, dem Winkel c e f gleich. Der Winkel c aber ist der gemeinschaftliche Winkel der beyden Dreyecken e c f und b c d. Also ist auch der dritte c f e dem dritten c d b gleich. Und auf solche Weise sind diese zwey Dreyecke einander ähnlich, und ihre ähnliche Seiten sind gegen einander proportionirt: deswegen kann man schliessen, wie sich verhält b c zu c d, so auch e c zu c f.

4. Lehrsatz.

§. 45.

In einem jeden Dreyeck verhält sich die Summe zweyer Seiten zu der Differenz eben dieser Seiten, wie der Tangent der halben Summe der beyden Winkel, so an der dritten Seiten liegen, zu dem Tangenten der halben Differenz eben dieser Winkel.

Beweiß.

§. 46.

Mit der gegebenen größern Seite a c des Dreyecks a b c Fig. 4. Kupfert. II. wird ein Cirkel beschrieben, und die kleinere Seite c b wird bis an beyden Enden des Cirkulkreiß nach d und e verlängert. Auch ziehet man die Linien a d und a e. Ueber a e wird eine Perpendikulare errichtet, und a b so weit ausgezogen, bis solche die Perpendikulare in f berühret.

§. 47.

Da nun c d gleich ist c a und auch c e, so ist b d die Summe der gegebenen Seiten b c und c a zusammen genommen, b e aber ist derselben Differenz. Da nun e a d ein rechter Winkel ist, und wenn a e für den Radium oder Sinus totus genommen wird, so ist a d der Tangent des Winkels a e d, und f e der Tangent des Winkels e a f.

§. 48.

Nun ist der Winkel a e d gleich der Helfte des Winkels d c a, und d c a ist gleich den beyden Winkeln c b a und b a c; also ist a e d die halbe Summe der beyden Winkeln b und a in dem gegebenen Dreyeck, und a d ist derselben Tangent. Ferner weil c b a den beyden Winkeln b e a und b a e gleich ist, so ist b a e die Differenz, zwischen a e b, oder der halben Summe der Winkel b und a, in dem gegebenen

Drey=

Dreyeck a b c, und auch dem größern Winkel c b a, so der größern Seite gegenüber stehet, also die halbe Differenz der zwey Winkel a und b in dem Dreyeck a b c. Endlich weil c a gleich ist c e, und der Winkel c e a gleich ist dem Winkel c a e, also nimmt man beyde von den rechten Winkeln f e a und d a e hinweg; so ist auch c a d gleich b e f, und weil c a gleich c d, ist auch c a d gleich c d a, deswegen ist auch f e b gleich c d a.

Wenn nun also in den zweyen Dreyecken d b a und f b e die Winkel b d a gleich b e f, und f b e gleich ist d b a, so ist d b die Summe der beyden Seiten c a und c b: b e aber ist die Differenz derselben gleich d a, als Tangent der halben Summe der Winkel c b a und c a b: f e aber dem Tangenten der halben Differenz c b a weniger c a b.

5. Lehrsatz.

§. 49.

Wenn in einem scharfwincklichten Dreyeck a b c mit der mittlern Seite b c ein Cirkul gerissen wird, der die größte Seite a c durchschneidet, und wenn sie bis e fortgesetzt worden, man sagen kann, es verhalte sich a c: als Summe der beyden Seiten a b und b c gleich der Differenz dieser beyden Seiten b c weniger b a: dem fortgesetzten Stück a e.

Beweiß.

§. 50.

Es wird mit b c Fig. 5. Kupfert. II. aus b ein Cirkul gerissen, und c a bis in e, und b a in f und g fortgesetzt oder verlängert. Endlich werden die Linien c f und e g gezogen.

Weil b c gleich b g und gleich b f ist, so ist auch a f gleich a b und b c, und a g gleich b c weniger b a. Und weil in den Dreyecken f a c und a e g die Winkel f a c und e a g einander gleich, und so auch a f c und a e g; so ist a c die größte Seite im Dreyeck a b c : a f, der Summe der übrigen Seiten a b und b c gleich a g, die Differenz derselben Seiten ist a e.

Praxis der Trigonometrie.

Von dem Gebrauch der Logarithmischen Tabellen.

§. 51.

Ich werde hier nichts von den Tabellen der Sinus, Tangenten, und Secanten gedenken, weil sie seit der Zeit als Neper zu Anfang des vorigen Jahrhunderts, den herrlichen Canon der Logarithmen erfunden, nicht mehr im Gebrauch sind. Durch diese Erfindung ist der ganzen Mathematik, besonders aber der Trigonometrie

nometrie vieler Vortheil zugewachsen, weil dadurch die verdrießliche Multiplication und Division mit so großen Zahlen, in die leichte Addition und Subtraktion, das Quadrieren ins Duplieren, das Cubiren ins Triplieren, die Quadratwurzel ausziehen in das Halbiren, und die Kubikwurzel ausziehen mit 3 dividiren, verwandelt worden.

§. 52.

Die Tabellen der Logarithmen, sind so eingerichtet, daß jedes Blatt durch ablaufende Striche in Columnen abgetheilt ist. Die erste Columne linker Hand enthält die Zahlen so in natürlicher Ordnung von 1. 2. 3. bis 10000, in den gemeinen Tabellen fortgehen. In der Columne zur rechten Hand aber sind die diesen Zahlen zukommende Logarithmen. Ueber den Columnen wo die natürliche Zahlen stehen, sind oben mit dem Wort Zahlen (numeri) die andern aber mit dem Wort Logarithmen bezeichnet.

§. 53.

Es ist aber ein Logarithmus der Exponent jener Potenz, worzu man die Zahl 10 erheben müßte, damit sie der gegebenen Zahl gleich werde. Die ganze Zahl, welche bey den Logarithmen vor dem Punkt stehet, wird die Charakteristik des Logarithmus genennet: die darauf folgende Zahlen aber werden der Decimalbruch geheißen. Z. B. 2.9898946, hier ist 2 die Charakteristik, und 9898946 der Decimalbruch.

§. 54.

Wenn die Zahlen kleiner als 10, so ist die Chararistik 0: diejenige aber so größer als 9, aber kleiner als 100, haben die Charakteristik 1. Die Zahlen aber so zwischen 100 und 1000 enthalten, haben einen Logarithmus mit der Charakteristik 2. Von 2000 biß 9999 aber ist die Charakteristik 3. Es hat überhaupt eine jede Zahl ein Logarithmus dessen Charakteristik um 1 kleiner ist, als die Anzahl der Ziffern, woraus die Zahl bestehet. Wenn die Zahl nur aus einer Ziffer bestehet, z. B. 6, so ist ihre Charakterist 0. Bestehet sie aus zwey Ziffern, z. B. 13, so ist die Charateristik 1. u. s. f. Also gehöret für die Charakteristik 0; eine Zahl die nur aus einer Ziffer bestehet, vor die Charakteristik 1. gehöret eine Zahl so aus zwey Ziffern bestehet, und die Charakteristik 2, hat eine Zahl von drey Ziffern. Es gehöret also für einen jeden Logarithmen eine Zahl welche um eine Ziffer mehr hat, als in der Charakteristik Einheiten sind. Nun wollen wir zu den Aufgaben schreiten.

1. Aufgabe.

§. 55.

Einer gegebenen Absolutzahl ihren Logarithmen finden, so noch in der Tabelle stehet. Z. B. 5687.

Auf-

Auflösung.

§. 56.

Es wird in der Columne zur linken Hand wo oben das Wort Zahlen oder numeri stehet, die gegebene Zahl 5687 gesucht; so wird man in der Columne zur rechten Hand den Logarithmen 3.7548832 finden.

2. Aufgabe.

§. 57.

Den Logarithmen zu einer Zahl zu finden welche größer ist, als die Tabellen gehen. Z. B. 568739.

Auflösung.

§. 58.

Es wird zuerst von denen vier ersten Ziffern 5687 der Logarithmns gesucht, dieser ist 3.7548832, und ziehe diesen von seinem nächst folgenden größern 3.7549596 ab, weil ihm an Zahlen noch etwas zuwachsen soll, so ist der Unterscheid (Differenz) 764. Nun spricht man wie sich verhält 1. mit so viel zugesetzten Nullen als hinten Ziffern abgeschnitten worden: als hier zwey Ziffern, davor zwey Nullen kommen; (wären es drey Ziffern so müßten drey Nullen, bey vier, 4 Nullen u. s. f. neben die 1 gesetzt werden, wenn aber nur eine Ziffer abgeschnitten worden, wird neben die 1 nur eine 0 gesetzt) zu der Differenz zwischen den beyden Lo-

garithmen 764, so verhält sich 39 oder die abgeschnittene Zahl, kommen 292, diese addirt man zu dem Logarithmen der ersten vier Ziffern 3·7548832, kommt 3·7549129, vor den Logarithmen von 568739. Hier kommt aber noch die Charakteristik 3 in Betracht, welche in 5 verwandelt werden muß, weil die gegebene Zahl aus sechs Ziffern bestehet, und wie oben bereits gewiesen, die Charakteristik um 1 weniger seyn muß; also ist der wahre Logarithmen von 568739 mit seiner Charakteristik 5·7549129.

Der nächst größere Log.	=	3·7549·596
Log. von 5687	=	3·7548832
Differenz	=	764

```
100 — 764 — 39
        39
      ----
      6876
      2292
      ------
      297|96
```

Log. von der Zahl 5687	=	3·7548832	
		297	addirt
		3·7549129	

Die Charakteristik in 5 verwandelt, ist der wahre Logarithmus 5·759129 von der Zahl 568739.

3. Auf-

3. Aufgabe.

§. 59.

Wenn der Logarithmus gegeben, seine Absolutzahl zu finden.

Auflösung.

§. 60.

Entweder ist der Logarithmus in den Tabellen zu finden: oder er ist nicht darinnen, wir wollen beydes erläutern.

1) Es seye der gegebene Logarithmus 3.2723058 dessen Absolutzahl soll gefunden werden. Man sucht in der Tabelle in der Columne zur rechten Hand, da oben Logarithmen stehet, denselben; so findet man zur linken unter den Zahlen (numeris) 1872 die Absolutzahl.

2) Wenn der Logarithmus nicht genau in der Tabelle ist, seine Absolutzahl zu finden:

Es seye der gegebene Logarithmus 3.2592213.

Es wird zu diesem Logarithmen, der nächst kleinere gesucht der sich in der Tabelle befindet, ist, 3.2591158 dessen Absolutzahl 1816. Von dem gegebenen Logarithmen 3.2592213 ziehe man den nächst kleinern ab, nemlich 3.2591158 so bleibt zum Rest 1055 als Zähler. Hierauf wird der nächst genommene kleinere Logarithmus von dem noch größern in der Tabell abgezogen: als von 3.2593549, bleibt zum Rest 2391 der

Nenner, welcher zu der ersten gefundenen Absolutzahl also gesetzt wird:

$$1816 \frac{1055}{2391}$$

Der gegebene Logar.	=	3.2592213
Der nächst kleinere	=	3.2591158
dessen Absolutzahl 1816		Zähler 1055
Der nächst größere Log.	=	3.2593549
Der nächst kleinere Log.	=	3.2591158
		Nenner — 2391

Die ganze Absolutzahl $1816 \frac{1055}{2391}$

4. Aufgabe.

§. 61.

Den Logarithmen zu einem Bruch zu finden.

Auflösung.

Es seye der Bruch $\frac{5}{8}$.

Der Bruch wird umgekehrt und daraus $\frac{8}{5}$ gemacht. Nun wird der Logarithmus zu 8 gesucht, ist, 0.9030900, und zu 5 ist 0.6989700; dieser wird von dem Logarithmus von 8 abgezogen, so bleiben 0.2041200 für den Logarithmen des Brnchs $\frac{5}{8}$ welchen man vornen mit einem Strich bezeichnet —— 0.2041200 um anzu-

zeigen daß es ein Logarithmen von einem Bruch seye.

Log. von 8 = 0.9.0.3.0900
Log. von 5 = 0.6989700

0.2041200 Logarith. des Bruchs $\frac{8}{5}$.

Anmerkung.

§. 62.

Wenn der Bruch ein Bastardbruch ist, z. B. $\frac{6}{2}$ so wird er nicht umgekehrt, sondern der Logarithmus von 2, wird so gleich von dem Logarithmus der 6 abgezogen. Soferne aber der Bruch ein vermischter ist, z. B. $3\frac{3}{7}$ so wird er reduciert, und macht daraus $\frac{24}{7}$, und verfährt damit wie mit dem Bastardbruch.

5. Aufgabe.

§. 63.

Zwey Zahlen durch Hülfe der Logarithmen zu multiplicieren.

Auflösung.

Es seyen die zwey Zahlen 35 und 24.

Es werden die zwey Zahlen unter den Nummern aufgesucht, und deren Logarithmen zusammen addirt; was heraus kommt, wird unter den Logarithmen in der Columne zur rechten gesucht; so wird man in der Columne zur Linken das verlangte Produkt finden.

Log. von 35 = 1.5440680
Log. von 24 = 1.3802112

2.9242792 = 840 Produkt.

6. Aufgabe.

§. 64.

Durch Hülfe der Logarithmen eine Zahl in die andere theilen.

Auflösung.

Es seye die Zahl 186 welche durch 6 zu theilen.

Zuerst suche man den Logarithmen zum Dividendus 186, und hernach des Divisors 6: Leztern ziehe man von ersterm ab, so giebt der Rest den Logarithmum, welcher den Quotienten anzeiget.

Log. von 186 = 2.2.695.129
Log. von 6 = 0.7 781 512

Rest 1.4 913 617
Quotient = 31.

7. Aufgabe.

§. 65.

Eine gegebene Zahl zu einer bestimmten Potenz zu erheben.

Auflösung.

Der Logarithmus der gegebenen Zahl wird mit dem Exponenten der Potenz zu welcher sie erhoben

hoben werden soll multiplicirt: nemlich mit 2, wenn man sie zur zweyten, und mit 3, wenn man sie zur dritten Potenz erhöhen will. Das Produkt welches heraus kommt ist der Logarithmus der Potenz welche man verlangt, nemlich der gegebenen Zahl.

Z. B. Man soll zu der gegebenen Zahl 25 die zweyte Potenz oder das Quadrat davon suchen.

Log. von 25	=	1.3979400
		2 multiplic.
Produkt	=	2.7958800

625 Zweyte Potenz, oder das Quadrat von 25.

Z. B. Es solle die gegebene Zahl 15 zur dritten Potenz, oder dem Würfel (Cubus) erhoben werden.

Log. von 15	=	1.1760913
		3
Produkt	=	3.5282739

3375 dritte Potenz, oder der Kubus von 15.

8. Aufgabe.

§. 66.

Aus einer gegebenen Zahl entweder die Quadrat oder Kubikwurzel durch Hülfe der Logarithmen ausziehen.

Auflösung.

Der Logarithmus der gegebenen Zahl wird durch den Exponenten der Wurzel, welche man ausziehen soll getheilt: nemlich mit 2, wenn es die zweyte Potenz oder Quadratwurzel ist; oder mit 3 wenn man die dritte Potenz oder Kubikwurzel ausziehen soll, u. s. f. Der Quotient ist der Logarithmus der verlangten Wurzel. Z. B. Man soll aus 625 die Quadratwurzel ziehen.

Log. von 625 = 2.7958800
Exponent der Wurzel 2 divid.

Quotient = 1.3979400
25 Quadratwurzel der Zahl 625

Z. B. Es soll aus 3375 die Kubikwurzel gezogen werden.

Log. von 3375 = 3.5282739
Exponent der Wurzel 3

Quotient = 1.1760913
15: Kubikwurzel der Zahl 3357.

Von

Von den Logarithmen der Sinus und Tangenten und wie solche gebraucht werden.

§. 67.

Die Tabellen worinnen die Logmarithen der Sinus und Tangenten zu finden, sind auf folgende Art eingerichtet. Auf den linken Seiten wird man bey Eröfnung des Buchs oben die Grade von 0 bis 44 finden. Eine jede Seite ist in sechs Columnen getheilt. In der ersten sind die Minuten dieses Grades von 0 bis 30, oder von 30 bis 60 angezeiget: in der zweyten findet man die Sinus für die Grade und Minuten. In der dritten die Tangenten, und in der vierten die Sekanten: in der fünften aber sind die Logarithmen der Sinus, und in der sechsten die Logarithmen der Tangenten. Wenn man bey Eröfnung des Buchs die rechter Hand liegende Seite betrachtet, so wird man gewahr werden, daß diejenige Grade daselbst verzeichnet sind welche über 44 steigen, und zwar in solcher Ordnung, daß die Grade von den hintern Blättern gegen die vordern immer steiget. Es sind diese Seiten auf eben die Art in sechs Columnen getheilt wie die auf der linken Seite, nur mit diesem Unterscheid, daß die Minuten nicht von oben herab

ab wachsen, oder von 0 oder 30 anfangen, sondern sie fangen von 60 oder 30 an, und nehmen herunterwärts ab.

I. Aufgabe.

§. 68.

Zu einem gegebenen Winkel, in Graden und Minuten, seinen Sinus und Tangenten, in den Tabellen finden.

Auflösung.

Es seye der gegebene Winkel 36°40′ zu diesem der Sinus gesucht werden solle.

Weil die 36°40′ nicht über 44 steigen, so sucht man die 36 Grade oben zur linken Seite, und in der ersten Columne die 40 Minuten. Alsdenn fährt man mit dem Finger von den 40 Minuten gerad hinüber in die Columnen worüber Logarithmus Sinus stehet; so wird man den Logarithmum von 36°40′ finden 9.8140192.

§. 69.

Ist aber der Winkel über 44 Grad groß so wird derselbe auf der Seite zur rechten Hand gesucht. Z. B. wir wollen den Logarithmus Sinus von 86°13′ haben; so sucht man oben die 86° und in der ersten Columne die 13 Minuten von unten aufwärts; fährt von den 13, in die Columne wo oben Log. Sin. stehet; so wird man den Logarithmus von 9.9990525 finden.

§. 70.

Auf eben diese Weise wird auch mit den Tangenten verfahren: denn man darf von denen Minuten nur bis in die Columne hinüber fahren, wo oben Logarithmus der Tangenten stehet. Z. B. bey 36°40′ wird der Tangent seyn 9.8718486. Bey dem Winkel von 86°13, aber ist der Tangent 11,1796162.

2. Aufgabe.

§. 71.

Den Logarithmus Cosinus und des Contangenten für eine gegebene Zahl an Graden und Minuten finden, welche in den ältern Tabellen, z. B. des Vlaks nicht verzeichnet sind.

Auflösung.

Es sey die Anzahl an Graden 34 und an Minuten 15 den Cosinus zu finden.

Man suche die 35°15′ in der Tabelle zur linken Seite, weil sie unter 44 Graden sind, und fahre in der ersten Columne, wo oben Minuten gezeichnet sind, bis auf 15 herunter: von hieraus aber quer hinüber bis auf die Seite des Blatts zur rechten Hand, wo oben Log. Sinus stehet, so erhält man den Cosinus zu 35°15′, und ist die Logarithmus 9.9120315.

§. 72.

Die Anzahl der Grade seye 65°19′ den Contangenten finden.

Die 65°19′ werden in der Tabelle auf der rechten Seite gesucht, weil sie über 44° steigen, und fährt von den 19′, auf die Seite zur linken Hand in die Columnen wo oben Log. des Tangenten stehet, hinüber, so wird man finden 9.6623765: und dieser ist der verlangte Logarithmus des Contangents vor 65°19′.

3. Aufgabe.

§. 73.

Den Sinus oder Tangenten eines Winkels finden, welcher grösser als die Tabellen enthalten.

Auflösung.

Es seye der Winkel 136°45′.

In diesem Fall muß der gegebene Winkel von 180 Graden abgezogen werden, und zu dem Rest wird in den Tabellen der Sinus gesucht.

179 :	60
136 :	45
Rest 43° :	15′

So ist 9.8358066 der Logarithmus Sinus. Will man den Tangenten haben, so sucht man den Logarithmus unter den Tangenten.

4. Auf-

4. Aufgabe.

§. 74.

Den Logarithmus Sinus zu finden wo Grade, Minuten und Sekunden beysammen sind.

Auflösung.

In den meisten Logarithmischen Tabellen sind die Sekunden nicht verzeichnet. Man kann sie aber auf folgende Art ziemlich genau finden.

Z. B. Es soll der Logarithmus Sinus zu 16°38′20″ gefunden werden: so sucht man den Logarithmus zu 16°38, er ist 9.4567392. Unter diesen schreibt man den nächst größern Logarithmus von 16°39′, welcher ist 9.4571618, und ziehet von diesem den kleinern ab, so erhält man die Differenz derselben: so wird man finden 4226. Ferner wird folgende Proportion gemacht. Wie sich verhält 1 Minute oder 60 Sekunden zu der gegebenen Anzahl der Sekunden, nemlich 20″, so verhält sich die Differenz 4226 zum vierten Glied. Man wird finden daß das vierte Glied gleich 1409: und diese Summe ist die Differenz, welche man zum Logarithmus des niedern Grades addieren muß, wenn die Logarithmen von Minuten zu Minuten wachsen, wie solches bey den Sinus und Tangenten geschiehet; hingegen werden sie abgezogen, wenn die Logarithmen von Minuten zu Minuten abnehmen, und dieses geschiehet bey den Co-

D sinus

sinus und Contangenten. In unserm Beyspiel wird also addirt und erhält man 9.5568801 so der verlangte Logarithmus Sinus für 16°38′20.

Log. von 16°38′	=	9.4567392
Log. von 16°39′	=	9.4571618
Differenz	=	4226

Differenz

60″ — 4226 — 20″

2

1409.4   8458

2 · /4

Log. von 16°38	=	9.5567392
Log. Sinus von		1409 Differenz.
von 16°38′20″	=	9.5568801

§. 75.

Will man aber den Cosinus von 26°39′35″ wissen, so wird also verfahren.

Logarith. von 26°39′	=	9.9512.2.24
Logarith. von 26°40	=	9.9511590
Differenz	=	. . . 634

Es werden allhier wie bereits oben gelehrt worden, die Cosinus von 26°39′ zu der rechten Seiten der Tabelle unter den Log. Sinus gesucht, und von einander abgezogen; so erhält man die Differenz 634. Alsdenn verfährt man nach der Proportion.

Proportion 60″ — 15″ — 634

15

Viertes Glied 158.3

3170
634
651/0
35/3

Dieses vierte Glied muß von dem Logarithmus 26°39′ abgezogen werden; denn die Logarithmen nehmen von Minuten zu Minuten ab. Man bekommt also

9.95122.2.4
∸∸158

9.9512066 Dieser ist der Logarith. Sinus für 26°39′15″

5. Aufgabe.

§. 76.

Wann der Logarithmus Sinus gegeben, die ihme respondierende Anzahl Graden, Minuten und Sekunden finden.

Auflösung.

Der gegebene Logarithmus wird in denen Tabellen entweder zur linken oder rechten Seite unter dem Wort Sinus gesucht. Wenn derselbe vollkommen in der Tabelle ist, so stehen die Grade oben, die Minuten aber findet man wenn man von dem Logarithmus in die Columne der Minuten fähret.

Z. B. Was gehört für ein Winkel für den Logarithmus 9.4259867? Dieser Logarithmus wird vollkommen gefunden in der Reihe der Sinus. Oben stehen 15°; und wenn man vom Logarithmus nach der Linken in die Columne der Minuten herüber fähret; so findet man noch 28'. Also gehöret für den gegebenen Logarithmus der Winkel 15°28'.

§. 77.

Sofern aber der gegebene Logarithmus nicht vollkommen, seinen letzten Ziffern nach, in der Tabelle anzutreffen; so schreibt man den nächst kleinern Logarithmus, den gegebenen, und den nächst größern unter einander. Der nächst kleinere wird von dem gegebenen, und auch von dem nächst größern abgezogen; deswegen man zwey Differenzen erhält. Hernach macht man die Proportion, wie sich verhält die Differenz zwischen dem nächst kleinern und nächst größern Logarithmus, zur Differenz zwischen dem nächst kleinern und gegebenen Logarithmus; also verhält sich auch 1 Minute oder 60 Sekunden zum vierten Glied. Dieses vierte Glied giebt die Sekunden, welche man zu den Graden und Minuten, so für den nächst kleinern Logarithmus gehören, addieret, wenn die Logarithmen von Minuten zu Minuten wachsen; wenn sie aber von Minuten zu Minuten abnehmen, müssen sie davon abgezogen werden.

Z. B. Es soll der Winkel für den Logarithmus Sinus 9.4602412 gefunden werden

der gegebene Log.	=	9.4 6.0.2.4.1.2
nächst kleinere	=	9.4 6 0 1 0 7 9
Differenz	=	1 3 3 3

Nächst größere Log.	=	9.4 6 0 5.2.7.0
nächst kleinere	=	9.4 6 0 1 0 7 9
Differenz	=	4 0 9 1

Wie	zu	also
4091 —	1333 —	60″
	60	
19″	79980	
	39070	
	2251	

Der Winkel für den gegebenen Logarithmus ist also 16°46′19″.

Von der Berechnung der Dreyecke.

Erster Abschnitt.

Von denen rechtwinklichten Dreyecken.

I. Aufgabe.

§. 78.

Wenn in einem rechtwinklichten Dreyeck abc Fig. 6. Kupfert. II. die beyden Seiten ab und bc wie auch der rechte Winkel bekannt, die übrige Winkel zu finden.

Auflösung.

Z. B. Die Grundlinie ab seye 36′, und bc oder die senkrechte Linie habe 43′, so ist die Proportion

ab :	bc :	Rad. oder Sin. Tot. von
36′	43′	90°
1.5563025 —	1.6334685 —	10.0000000
	10.0000000 addirt	
	11.6334685	
Logarith. des	1.5563025 subtrahirt	
Tang. des ∠ a 10.0771660		

giebt

giebt zum Tang. des Winkels a 50 Grad, 3 Minuten.

Um nun den Winkel c zu finden; so darf man nur den gefundenen Winkel a 50 3, von 90° abziehen, so wird auch der Winkel c bekannt.

90° = dem rechten Winkel b
50°3′ = den ∠ a
bleibt 39°57′ vor den ∠ c.

Diese Aufgabe gründet sich auf den 11 Grundsatz, wo die Ursache angezeiget, warum der Tangent genommen werden muß.

2. Aufgabe.

§. 79.

In einem rechtwinklichten Dreyeck a b c Fig. 6 seyn bekannt die Basis a b, und der Winkel b a c, so dem Tangenten b c, welchen man finden soll, gegenüber stehet.

Auflösung.

Die Seite oder Basis a b habe 36′, und der Winkel a b c 50°3′.

So spricht man, weil a b der Radius oder Sinus totus ist: wie sich verhält der Sinus totus von 90°, zur Seite a b = 36′; also verhält sich der Tangent des Winkels b a c = 50°3′ zu der Seiten b c.

Sin. tot. abc.	Seite ab.	Tang. des ∠ bac.
90°	36′	50°3′
10.0000000 —	1.5563025 —	10.0769563
	addirt	1.5563025
		11.6332588
	subtrahirt	10.0000000
	Logarithm. vor die Seite	1.6332588

oder Tangenten b c = 43′.

3. Aufgabe.

§. 80.

An einem rechtwinklichten Dreyeck a b c Fig. 6. ist bekannt, die Seite a b und der Winkel b a c, es soll die Seite a c, oder der Sekannt gefunden werden.

Auflösung.

Z. B. Die Seite a b habe 36′ und der Winkel b a c 50°3′.

Hier muß man zuerst den bekannten Winkel b a c von 50°3′, von 90° als dem rechten Winkel abziehen, so bleibet Rest 39°57′ vor den Winkel a c b. Nun sagt man ferner, wie sich verhält der Sinus des Winkels a c b von 39°57′ zu der ihm gegenüber stehenden Seite a b von 36′, eben also verhält sich auch der Sinus des Winkels a b c von 90° zu der entgegen stehenden Seite a c.

Der

Der rechte ∠ a b c ist gleich		89°60′
Der ∠ b a c	——	50° 3′
Rest vor den ∠ a c b	=	39 57′

Sinus von a c b 39°57′	Seite a b 36′	Sinus tot. oder Radius a b c 90°
9.8076154 —	1.5563025 —	10.0000000
		1.5563025
		11.5563025
		9.8076154
Logarith. vor a c =		1.7486871

Giebt in der Columne der Zahlen (numeris,) 56′, und so lang ist die Linie a c.

4. Aufgabe.

§. 81.

Wenn in dem rechtwinklichten Dreyeck a b c bekannt der Winkel b a c und die Linie a c, die Linie a b finden. Fig. 6.

Auflösung.

Der Winkel c b a ist 90°, der Winkel b a c 50°3′ und die Linie a c 56′.

Also spricht man nach folgender Proportion: wie sich verhält der Sinus totus oder Radius c b a von 90°, zu der ihm entgegen stehenden

Seite a c von 23′, also verhält sich der Cosinus des Winkels b a c von 50°3′; nemlich der Winkel a c b 39°57′, zu der ihm entgegen stehenden Seite a b.

$$\angle\, cba = 89°60'$$
$$\angle\, bac = 50°\ 3$$
$$\angle\, \text{Cosin.} = 39°57'$$

Sin. tot. oder Radius c b a	Seite a c	Sinus von a c b
90°	56′	39°57′
10.0000000 —	1.7481880 —	9.8076154
		1.7481880
		11.5558034
		10.0000000
Log. von a b so gleich 36′.		1.5550034

5. Aufgabe.

§. 82.

In einem rechtwinklichten Dreyeck a b c Fig. 6. sey bekannt der Winkel b a c und die Seite b c, die Seite a c finden.

Auflösung.

	Sin. b a c	Seite b c	Sin. tot. c b a
Proportion	50°3′	43′	90°

Anmer-

Anmerkung.

Ich werde in den übrigen Aufgaben der rechtwinklichten Dreyecken allezeit nur die Proportion ansetzen, welche die Anfänger darnach berechnen können.

6. Aufgabe.

§. 83.

Es sey an einem rechtwinklichten Dreyeck a b c bekannt, der Winkel a c b und a b die Seite b c finden.

Auflösung.

∠ c b a		89°60′
∠ a c b	=	39°57′
∠ c a b	=	50° 3′

Proportion

Sin. a b c	Seite a b c	Sin. c a b
39°57′	36′	50°3′

7. Aufgabe.

§. 84.

In einem rechtwinklichten Dreyeck a b c seyn bekannt der Winkel a c b und die Seite a b, die Seite a c finden.

Auflösung.

Proportion.

Sin. a c b	Seite a b	Sin. tot. a b c
39°57′	36′	90°

Zwey-

Zweyter Abschnitt.

Von den scharf- oder spitzwinklichten Dreyecken.

1. Aufgabe.

§. 85.

In dem scharf- oder spitzwinklichten Dreyeck def, seyn bekannt die zwey Winkel fde und fed, wie auch die Seite fe. Die Seite df zu finden. Fig. 7. Kupfert. II.

Auflösung.

Z. B. fde habe 51°30′, und der Winkel fed 60°, die Seite fe aber 20′. So spricht man

Proportion.

Sinus fde 51°30′		Seite fe 20′		Sinus fed 60°
9.8935444	—	1.3010300	—	9.9375306
				1.3010300
				11.2385606
				9.8935444

Log. der Seite df von 22′ = 1.3450162

2. Auf-

2. Aufgabe.

§. 86.

Wenn an einem scharfwinklichten Dreyeck def bekannt, die zwey Winkel fde und fed und die Seite de, die Seite fe finden.

Auflösung.

Z. B. Der Winkel fde seye 51°30′, und der Winkel fed 60°, die Seite de aber 25′.

Hier wird der Winkel fde 51°30′, und der Winkel fed 60° zusammen addirt, kommen 111°30′. Diese werden von 180° abgezogen, bleiben 68°30′ vor den Winkel dfe.

Nun hat folgender Proportionssatz statt.

$$\begin{array}{rl} 179°60' & \\ 111°30' & \\ \hline \angle dfe = 68°30' & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 51°30' & \angle fde \\ 60° - & \angle fed \\ \hline 111°30' & \end{array}$$

Sinus dfe 68°30′	Seite de 25′	Sinus fde 51°30′
9.9686779 —	1.3979400 —	9.8935444
		1.3979400
		11.2.9.1.4 8.4.4
		9.9686779

Log. der Seite fe giebt 20¼ = 1.3228065

3. Auf-

3. Aufgabe.

§. 87.

In einem spitzwinklichten Dreyeck def sind bekannt die zwey Seiten fd und de und dem darzwischen liegenden Winkel fde, die Seite fe finden.

Auflösung.

Bey dieser Auflösung muß der 4 Lehrsatz nachgesehen werden, nach welchem man alsdenn folgender maßen verfähret.

Z. B. Die Seite fd seye 22′ und de 20′, der Winkel fde aber 51°30′.

§. 88.

Zuerst werden die zwey Seiten de 20′, und fd 22′ zusammen addirt, kommen 42′, den ziehet man von der Seite fd 22′ die Seite de, 20 ab, bleiben vor den Rest 2, welches die Differenz ist.

§. 89.

Zweytens wird der gegebene Winkel fed 51°30′ von 180 abgezogen, (oder weil Minuten dabey von 179°60′) bleiben 128°30′: diese werden halbirt, kommen 64°15′, so der Winkel des Tangenten ist.

§. 90.

Endlich spricht man: wie sich verhält die Summe der zwey Seiten de und fd 42′ zu dem halben Tangenten 64°15′: so verhält die Dif-

Differenz 2 zu dem kommenden Winkel des Tangenten 5°38′. Diese werden von 64°15′ abgezogen, kommt Rest 58°37′ vor den Winkel d e f. Alsdenn werden auch die 5°38′ zu den 64°15′ addirt, kommen zur Summe 69°53′ vor den Winkel d f e. Nun folgt daraus die Proportion, wie der Sinus des Winkels d e f, 58°32′ sich verhält zu der Seite f d 22′, so verhält sich der Winkel f d e 51°30′ zu der ihme entgegen stehenden Seite f e 20′.

de = 20′	fd = 22	179°60′
add. fd = 22	de = 20 abgez.	51°30
Summe = 42′	Differenz = 2	138°30′
		½
		Tangent = 64°15′

Summe	Tangent	Differenz.
42′	64°15′	2
1.6232493 —	10.3166443 —	0.3010300
	0.3010300	
	10.6176743	
	1.6232493	
Logarithmus des Tangenten.	8.9944250	

64°15′
5 38 abgezogen.
58°37′ ∠ d e f

64°15′
5 38 addirt
60°53′ ∠ d f e

Sinus

Sinus def 58°37′	Seite df 22′	Sinus dfe 69°53′
9,9313065 —	1,3424227 —	9,8935444
		1,3424227
		11,2359671
		9,9313065
	Logarith. =	1,3046606

Dieser respondieret mit der Zahl 20, als so lang die Seite fe ist.

4. Aufgabe.

§. 91.

In dem spitzwinklichten Dreyeck def, seyen bekannt die zwey Seiten ef und de sammt dem Winkel fde, den Winkel dfe finden.

Auflösung.

Z. B. Die Seite ef hält 20′, und die Seite de 25′, der Winkel fde 51°30′.

Proportionssatz.

Seite fe 20′	Sinus fde 51°30′	Seite de 25′
1,3010300 —	9,8935444 —	1,3970400
		9,8935444
		11,2914844
		1,3010300
∠ def 78°2′	Log. Sin. =	9,9904544

5. Auf-

5. Aufgabe.

§. 92.

Es seyen an einem scharfwinklichten Dreyeck d e f bekannt die zwey Seiten f e 20′ und d e 25′, wie auch der Winkel d f e 78°2′, den Winkel f d e finden.

Auflösung.

Man spricht wie sich verhält die Seite d e zu dem ihr entgegen stehenden Winkel d f e, so verhält sich die Seite f e zu dem Winkel f d e. 51°30′.

Seite d e 25	Sinus d f e 78°2′	Seite f e 20
1.3979400 —	9.9904580 —	1.3010300
		9.9904580
		11.2914880
		1.3979400

∠ f d e 51°30′ Log Sin. = 9.8935480

6. Aufgabe.

§. 93.

Wenn an dem spitzwinklichten Dreyeck d e f, alle drey Seiten d e 25′, f e 20′ und d f 22′ bekannt, die drey Winkel f d e, f e d, d f e finden.

Auflösung.

Erstlich werden alle drey Seiten in sich selbsten multiplicirt, als de 25 ist 625, fe 20 ist 400, und df 22 ist 484. Hernach werden die beyde Quadraten de und df zusammen addirt, kommt zur Summe 1109, von dieser wird das Quadrat der Seite fe 400 abgezogen, bleiben Rest 709. Diesen durch das zweyfach der Basis de 25 ist 50 dividirt, kommen 14, (denn Bruch läßt man fahren) wo der Perpendikul fg aufstößt. Hierdurch wird ein rechtwinklichtes Dreyeck fgd erhalten, daran die zwey Seiten und der rechte Winkel bekannt, durch welche der Winkel fdg zu finden. Man spricht also wie sich verhält die Seite df 22′ zu dem gegenüber stehendem Radius oder Sinus totus fgd 90°, also verhält sich auch die Seite dg 14 zu dem Sinus des ihr entgegen stehenden Winkels dfg 30°21′, welchen man von 90° abziehen muß, so ist der Rest 59°35′ das Maaß des Winkels fde. Da nun dieser Winkel fde bekannt, sind die übrigen leicht zu finden: wenn man spricht wie sich verhalten die Seite fe 20, zu dem ihr entgegen stehendem Winkel fde, 59°35′ so verhält sich die Seite df, zu dem gegenüber stehenden Winkel fed, wird sich geben 71°33′. Dieser Winkel wird zu dem Winkel fde 59°35′ addirt, 131°8, welche man von 180° abziehet; da denn 48°52′ für den Winkel dfe übrig bleiben.

df = 22   de = 25   fe = 20

```
df = 22        de = 25      fe = 20
     22             25           20
   ----           ----         ----
     44            125          400
    44             50
   ----           ----
    484            625
    625 addirt
   ----
   1109
    400 subr.
  ----------
 6ϕ | 70(9 | 14 = dg
    | 2    |
                  de = 25
                        2
                     ----
                       50 das Doppelte
```

Seite de	Radius	Seite dg
22 —	90	14
1.3424227 —	10.0000000 —	1.1461280

```
   10.0000000
    1.1461280
   -----------
   11.1461280
    1.3424227
   -----------
    9.7037053
```

∠ dfg = 30°21′

```
   89°60′
   30 21 abgezogen.
   -------
   59°35′ ∠ fde
```

Seit fe	Sinus fde	Seite df
20	59°35	22
1.3010300 —	9.9356918 —	1.3424 227
		9.9356 918
		11.2781.145
		1.3010 300
		9.9770 845

∠ fed 71°33′
∠ fde 59°35′ addirt

131° 8′
179°60′

∠ dfe = 48°52′

Dritter Abschnitt.

Von denen stumpfwinklichten Dreyecken.

1. Aufgabe.

§. 94.

In einem stumpfwinklichten Dreyeck seyen bekannt, die zwey Winkel abc und bca, wie auch die Seite ac: man soll die Seite ab finden. Fig. 8. Kupfert. II.

Auf=

Auflösung.

Z. B. Der Winkel a b c halte 30°, der Winkel a c b 122°30', und die Seite a c 17'.

Weil der Winkel a c b 122°30' in den Tabellen nicht zu finden, indem sie nur bis 90° berechnet sind; so muß dieses Winkels Sinus Complementi, oder der Cosinus an dessen Statt genommen werden; dahero müssen die 122°30' von 180 Grad abgezogen werden, so ist der Cosinus 57°30'.

Alsdenn spricht man: wie sich verhält der Sinus des Winkels a b c von 30°, zu der ihm entgegen liegenden Seite a c 17', so verhält sich der Sinus Complementi oder Cosinus 57°30' zu der gegenüber stehenden Seite a b 28'.

Sinus a b c		Seite a c		Cosinus von a c b
30°		17'		57°30'
9.6989700	—	1.2304489	—	9.9260292
				1.2304489
				11.1.5.6.4781
				9.6989700
		Logarith. von a b 28'	=	1.4575081

2. Aufgabe.

§. 95.

Wenn in dem stumpfwinklichten Dreyeck abc bekannt die Winkel abc und acb und die zwischen diesen Winkeln liegende Seite bc, die Seite ac finden.

Auflösung.

Z. B. der Winkel abc seye 30°, und acb 122°30′, und die Linie bc 16′.

Zuerst müssen die beyde Winkel abc 30°, und acb 122°30′ zusammen addirt werden, die Summe wird von 180° abgezogen, so ist der Rest gleich 57°30′ gleich dem Winkel abc. Alsdenn macht man folgenden Proportionssatz.

Sin. bac	Seite bc	Sin. abc
57°30′	16	30
9.6989700 —	1.2041200 —	9.6989700
		1.2051200
		10.9030900
		9.6989700
	Log. von ac gleich :	1.2041200
	17′.	

3. Aufgabe.

§. 96.

An einem stumpfwinklichten Dreyeck abc ist bekannt die Seite ab und bc, mit

mit dem darzwischen liegenden Winkel a b c, die Seite a c finden.

Auflösung.

Zuerst werden die zwey Seiten a b von 28', und b c 16' zusammen addirt; so ist die Summe 44'. Hernach wird die Seite b c 16, von der Seite a b 28 abgezogen, bleibt vor die Differenz 12. Ferner wird der Winkel a b c von 30°, von 180° abgezogen, geben 150°, und die Helfte 75° davon ist der Winkel des Tangenten.

Alsdenn spricht man die

Summe	Tangent	Differenz
44	75°	12
1.6434527 —	10.5719475 —	1.0791812
		10.5719475
		11.6511287
		1.6434527
45°30'	Log.	10.0076760

75° —
45°30 add.

120°30' = a c b

75' —
45 : 30 subtr.

29° 30' = b a c

Sin. bac	Seite bc	Sinus abc
29°30′	16′	30°
9.6925388 —	1.2041200 —	9.6989700
		1.2041200
		10.9030900
		9.6925388
Seite ac = 17′		Logar. 1.2105512

4. Aufgabe.

§. 97.

In dem stumpfwinklichten Dreyeck abc, sind gegeben die zwey Seiten ac und bc und der Winkel abc, den Winkel bac finden.

Auflösung.

Z. B. die Seite ac habe 17′, die Seite bc 16′, und der Winkel abc 30° und soll gefunden werden bac.

Proportionssatz.

Seite ac	Sin. abc	Seite bc
17	30°	16
1.2304489 —	9.6989700 —	1.2041200
		9.6989700
		10.9.030900
∠ bac 28°4′		1.2304489
	Sin. Log. =	9.6726411

5. Auf-

5. Aufgabe.

§. 98.

An einem stumpfwinklichten Dreyeck abc ist bekannt die Seite ab, und die Seite bc, wie auch der Winkel bac, den Winkel acb finden.

Auflösung.

Es seye ab 28, bc 16, der Winkel bac 28°4'; hält der Winkel acb 121°56' so gesucht werden soll.

Proportionssatz.

Seite bc	Sin. bac	Seite ab
16	28°4'	28
1.2041200 —	9.6725583 —	1.4471 580
		9.6725 583
		11.1197 163
		1.2041 200
	Log. Sin. =	9.9155 963

Cosinus acb
55°25'

179°60'
55°25'

124:35'

6. Aufgabe.

§. 99.

An einem stumpfwinklichten Dreyeck a b c, sind die drey Seiten a b, b c und c a bekannt, die drey Winkel finden.

Auflösung.

Die Seite a b seye 28', b c 16, a b 16, a c 17.

Zuerst werden alle drey Seiten in sich selbsten multiplicirt; zweitens die Quadraten von a c und b c werden zusammen addirt, und die heraus kommende Summe von dem Quadrat der Seite a b abgezogen: der Rest wird durch das Zweyfache der Basis a c dividirt, so erhält man den Ort wohin der Perpendikul c d aufstehet. Dadurch entstehet das rechtwinklichte Dreyeck a c d, woran zwey Seiten und der rechte Winkel bekannt, der Winkel a c d aber gefunden werden muß. Also spricht man wie sich verhält die Seite a c, zum Sin. tot. a d c also die Seite c d, zu dem entgegen stehenden Sinus des Winkels c a d. Dieser wird von dem rechten Winkel oder 90 abgezogen, der Rest in gleich dem Winkel a c d, welchen man von 180° abziehen muß, so ist der Rest b c a. Weil man hierdurch den a c b gefunden, und alle drey Seiten bekannt sind, können die übrige zwey leichtlich gefunden werden, und zwar nach folgendem Proportionssatz: wie sich verhält die Seite a c

gegen

gegen dem Cosinus a c b also die Seite b c, zu dem entgegen stehenden Winkel b a c. Dieser ∠ b a c wird zu a c b addirt, und hernach von 180° abgezogen, so bleibt der Winkel a b c übrig, und sind nach der Aufgabe alle drey Winkel gefunden worden.

ab = 28	bc = 16	ac = 17
28	16	17
224	96	119
56	16	17
□ ab = 78.4	□ bc = 256	□ ac = 289
Summe 545	16 = bc	□ bc = 256
32 | 239 | 7 : cd	2	Summe 545
14	32 doppelte	

Seite a c	Sin. tot. a d c	Seite c d
17	90°	7
1,2304489 —	10,0000000 —	0.845 09 80
		10.000 00 00
		10.845.09.80
		1,230 44 89
∠ c a d 24°18′	Log. Sin. :	9.614 64 91

90° −
24°18′ ∠ c a d

65°42′ ∠ a c d
179°60′

114°18′ b c a

Seite a b	Cosinus b c a	Seite b c
28	65°42′	16

1.4471580 — 9.9597106 — 1.2041200
9.9597106

11.1638306
1.4471580

Log. Sin. = 9.7166726

∠ bac = 31°23′
114°18′

145°41′
179°60′

∠ abc = 34°19′

Anwendung der Trigonometrie
bey
Messung der Distanzen in der
praktischen Geometrie.

1. Aufgabe.

§. 100.

Die Distanz zweyer Orte finden, da man zu einem nicht kommen kann. Kupf. II. Fig. 9.

Auf-

Auflösung.

Der Ort zu welchem man nicht kommen kann seye A; man soll finden wie weit er von b, als dem Ort wohin man kommen kann, entfernet seye. Die Operation mit dem Astrolab oder in Graden und Minuten getheilten Scheiben-Instrument ist folgende. Es wird einer von denen Gehülfen nach c geschickt, und läßt daselbsten einen Stab recht perpendikular einstecken; hernach läßt man die Distanzlinie b c genau messen, wie in der Geometrie gewiesen worden. (Es muß darauf gesehen werden, daß die Standlinie b c, gegen a b so proportioniret seye: damit weder bey b und c zu stumpfe noch zu spitzige Winkel entstehen.) Gesetzt wir haben die Linie b c gefunden von 150 Schuh. Alsdenn wird bey b der Winkel a b c gemessen, derselbe habe 85 Grade; darauf wird bey b ein Stab eingesteckt, und das Instrument wird in c aufgestellt, der Winkel a c b visiert, und 75° gefunden. Aus der Geometrie ist bereits bekannt, daß alle drey Winkel in einem Dreyeck 180 Grad haben: wenn also zwey bekannt, so darf man sie nur zusammen addiren, und die Summe von 180° abziehen, so erhält man den dritten Winkel a, 20 Grad groß.

Um nun die Seite a b zu finden, so spricht man: wie sich verhält der Sinus von 20 Grad gegen der entgegen liegenden Seite b c, von 150 Schuh;

Schuh; also verhält sich auch der Sinus des Winkels a c b gleich 75°; gegen seine ihm entgegen liegende Seite a b 424′.

Sinus b c a 20°	Seite b c 150°	Sinus a c b 75°
9.5340517 —	2.1760913 —	9.9859416
		2.1760913
		12.16.20.329
		9.5340517
	Logarithm. vor ab = 424′.	2.6279812

2. Aufgabe.

§. 101.

Wenn etliche Orte in einer geraden Linie liegen, ihre Distanzen, mittelst einer winkelrechten Standlinie zu finden. Kupfert. III. Fig. 1.

Auflösung.

Es wird von A aus die Standlinie AB mit dem Astrolab visiret, daß solche bey A einen rechten Winkel mache, und so lang seyn muß, daß man von B aus alle Orte C, D und E sehen könne dahero stellet man das Astrolab in B, und visiret die Winkel ABC, ABD und ABE.

Die Standlinie AB seye 56°, der Winkel ABE = 70°43′, ABD = 64°59′,

ABC

ABC 59°45'. Aus diesen bekannten Theilen können auf nachfolgende Weise die Distanzen der Orten gefunden werden.

Man spricht dahero, wie sich verhä t der Sinus totus oder Radius EAB 90° gegen die Seite AB 56°; also verhält sich der Tangent ABE 70°43' zu der Seite AE.

Sin. tot.	Standlinie	Tang.
EAB.	AB.	ABE.
90°	56°	70°43'
10.0000000 —	1.7481880 —	10.4560952
		1.7481880
		12.2042832
		10.0000000
Log. vor AE 160(°		2.2042832

Darnach spricht man weiters; wie der Radius oder Sinus tot. EAB, zu der Standlinie AB, also der Tangent des Winkels ABD 64°59' zu AD.

Sin. tot.	Standlinie	Tang.
EAB.	AB.	ADB.
90°	56°	64°59′
10.0000000 —	1.7481880 —	10.3309977
		1.7481880
		12.0791857
		10.0000000
Distanz AD 120°		2.0791857

Endlich wie

Sin. tot.	Standlinie.	Tang.
EAB.	AB.	ABC.
90°	56°	59°45′
10.0000000 —	1.7481880 —	10.2341953
		1.7481880
		11.9823833
		10.
AC = 96°		1.9823833

Wenn man nun von AE = 160°, die Distanz AD = 120° abziehet, so bleibet zum Rest für die Distanz DE = 40°. Und wenn man von AD = 120° die Seite AC 96° abziehet, giebt der Rest = 20°, die Distanz CD. Die Weite AC aber ist = 96°.

3. Auf=

3. Aufgabe.

§. 202.

Es sollen die Weiten etlicher Ortschaften, F, G, H, I, K so in einer geraden Linie liegen, vermög einer gegen sie gestellten schrögen Standlinie KL, gefunden werden. Kupfert. III. Fig. 2.

Auflösung.

Man messe die schröge Standlinie KL, sie habe 95°3′, welche aber von einer proportionirten Länge und ihre Lage so beschaffen seyn muß, damit die Winkel bey L nicht zu stumpf oder spitzig werden. Bey der Operation wird das Instrument zuerst in K aufgestellt, und der Winkel FKL gemessen, welchen wir vor 68°36′ Minuten annehmen. Alsdenn wird bey K wo das Instrument gestanden, ein Stab eingesteckt, der in L aber eingesteckte Stab ausgezogen, hingegen das Instrument hingestellt, und die unbewegliche Absichten (Dioptern) nach dem Stab bey K gerichtet. Wenn dieses geschehen so beobachtet man die Winkel FLK, 98°24′, GLK 87°15′, HLK 75°36′, ILK 53°25′. Die Rechnung ist folgende:

Zuerst muß man zu zweyen bekannten Winkeln den dritten suchen, die bekannte sind

∠ FKL = 68°36′
∠ FLK = 98°24′

167″
180

13° = ∠ KFL.

180°—
98°24′

81°36′ Compl.

Sin. KFL.	Standl.	Sin.Comp.FLK
13	95°3′	81°24′
9.3520880 —	2.9790929 —	9.9950893
		2.9790929
		12.9741821
		9.3520880

Log. vor FK = 3.6220941

FK = 4188(′

∠ FKL = 68°36′
∠ GLK = 87°15′

155°51′
179°60′

24°9′ ∠ LGK.

Sin.

Sin. LGK.	Standl. KL.	Sin. GLK.
24°9′	95°3′	87°15′

9.6118580 — 2.9790929 = 9.999 49 96
2.979 09 29

12.978.59.25
9.611 85 80

Log. vor GK = 3.366 73 45

GK = 2330

FK = 4188
GK = 2330

1858 Distanz vor FG.

∠ FKL = 68°36′
∠ HLK = 75°36

144 12
179 60

35°48 ∠ LHK.

Sin. LHK	Standl. KL	Sin. HLK
35°48′	95°3′	75°36′

9.7671244 — 2.9790929 — 9.9861369
2.9790929

12.9.6.52298
9.7671244

3.1981054

subt. 15°78′ = HK
von 18.58 =

280 = Distanz. HF.

∠ FKL = 68°36′
∠ ILK = 53°25′

122° 1′
179°60′

57°59 ∠ LIK.

Sin. LIK	Standl.	Sin. tot. ILK
57°59′	95°3′	53°25′
9.9283415 —	2.9790929 —	9.9047106
		2.9790929
		12.88.38.035
		9.9283415
90 = IK		1.9554620

Hier will noch ein Beyspiel beysetzen wie die Weite aus einem Schiff bis an eine Stadtmauer zu messen, Kupfert. III. Fig. 3. Das Schiff seye a b und die Mauer c. Bey dieser Art zu messen wird das Instrument auf dem vordersten Theil des Schiffes senkrecht gestellt und der Winkel bac visirt, erhalte 67°30′, von a wird bis aufs Wasser b gemessen, seye 24(′. Also spricht man wie sich verhält der

Sin.

Sin. tot. abc	zur Seite ab	— also Tang. bac
90°	24′	67 30′
10.0000000 —	1.3802112 —	10.3721481
		1.3802112
		11.7523593
		10.
		1.7523593

Bis zur Maur
bc = 56(′.

4. Aufgabe.

§. 104.

Die weite zweyer Oerter A und B zu messen da man zu keinem kommen kann. Kupfert. II. Fig. 10.

Auflösung.

Es wird denen zwey Oertern A B, die Standlinie C D, so viel möglich parallel und in proportionirlicher Länge abgesteckt, und hernach gemessen: z. B. sie seyn 210° lang. Alsdenn begiebt man sich in den Stad c und stellt daselbsten das Instrument auf, und visiret daraus die Winkel ACD = 135°30′, und BCD 51°. Hernach begiebt man sich zu dem Stand D, und beobachtet die Winkel CDB 90°20′, und CDA 19°20′; darauf sucht man zuerst die Seite AD, nach folgendem Beyspiel

 ∠A

∠ ACD = 135°30′ ∠ BCD = 51°—
∠ ADE = 19°20′ ∠ BDE = 90 20

abgezogen 154 50 141°20′
179°60′ 179 60

∠ CAD = 25°10′ ∠ CBD = 38°40′

179°60′
∠ ACD = 135°30′

44°30′ vor das Complement des ∠ ACD.

Sin. CAD	Standl. CD	Sin. Compl. ACD
25°10′	210°	44°30′
9.6286472 —	2.3222193 —	9.8456618
		2.3222193
		12.16.788.1.1
		9.6286472
AD = 346.	Log.	2.5392339

Ferners wird die Länge der Seite BD also berechnet.

Sin. CBD	Seite CD	Sin. DCB
38°40′	210°	51°
9.7957330 —	2.3222193 —	9.8905026
		2.3222193
		12.2.1.2.7.2.19
		9.7957330
Seite BD = 261°	Log.	2.4169889

Durch

Durch diese Rechnungen ist das Dreyeck A B D bekannt gemacht worden, an welchem zwey Seiten und der zwischenliegende Winkel gegeben. Die Rechnung wird vollführt wie in der 3ten Aufgabe der Berechnung der scharfwinklichten Dreyecken gelehret worden, und zwar also:

Seite AD = 346° AD = 346°
Seite DB = 261° DB = 261°

Summe = 607 85° Differenz

∠ CDB = 90°20′ 180°
∠ CDA = 19°20 71
∠ ADB = 71 — 109

$\frac{1}{2}$ 54°30′ Tangent.

Summe	Sing. Tang.	Differenz
607°	54°30′	85°
2.7831887 —	10.1467320 =	1.9294189
		10.1467320
		12.0761509
		2.7831887
∠ = 11°6°		Log. 9.2929622

add. 54°30′ subtr. 54°30′
11 6 11 6

∠ DBA = 65°36′ ∠ DBA 43°24′

Sin. DBA 65°36′	Seite AD 346°	Sin. ADA 71°
9.9593675 —	2.5390761 —	9.9756700
		2.5390761
		12.5147461
		9.8593675
Distanz AB 359°	Log.	2.5553786

5. Aufgabe.

§. 105.

Die Entfernung zweyer Ortschaften AB, zu finden, da man zu keinem kommen kann, und die Standlinie denselben gegenüber nicht in die Quer anzunehmen ist; sondern dieselbe hinter sich angenommen werden muß. Kupfertafel IV. Fig. 1.

Auflösung.

Zuerst wird die Standlinie CD gemessen, solche habe 181°. In C wird das Instrument aufgestellt, und die unbewegliche Absichten (Dioptern) nach A gerichtet. Hierauf richtet man die bewegliche Absichten nach B; so wird sich das Maaß des Winkels ACB von 118°30′ ergeben. Ferner richtet man die unbewegliche Absichten von C nach D, die bewegliche aber von C nach B; da denn das Maaß des Win-

kels

kels BCD seyn wird 124°, zuletzt werden die bewegliche Absichten von C nach A gerichtet; so ergiebt sich auch der Winkel ACD, 117°30′.

Zweytens wird bey C, statt des Instruments ein Stab eingesteckt, und der bey D stehende ausgezogen, das Instrument dafür aufgestellt, die unbewegliche Absichten nach C gerichtet, und die Winkel CDB = 39°52′, und CDA = 46°47′ mit denen beweglichen Absichten visiret. Die Rechnung geschiehet also: die Winkel ACD und ADC werden zusammen addiret, und die kommende Summe wird von 180 Graden abgezogen, der Rest ist der Sinus des Winkels DAC.

∠ ADC = 117°30′
∠ ACD = 46 47
164°17′
179°60
Sin. ∠ DAC = 15°43′

Sin. DAC	Standl. LDC	Sin. ADC
15°43 —	181°	46°47′
9.4327777 —	2.1760913 —	9.8625902
		2.1760913
		12.0386815
		9.4327777
		2.6059038

Seite AC = 403°

$\angle$ BCD = 124° −
$\angle$ CDB = 39°52′

163°52′
179°60′

Sin. $\angle$ CBD = 16(°8′

Sin. $\angle$ CBD	Standl. DC	Sin. $\angle$ CDB
16°8′	181°	39°52′
9.4438472 −	2.1760913 −	9.80 686 02
		2.17 60 9 13
		11.98.295.15
		9.44 38 + 72
Seite CB = 340°		2.53 910 43

AC = 403°
CB = 345

AC + CB = 749 Sum.

AC = 4.0.3°
CB = 3 4 6

AC = CB: 57(° Differenz.

179°60′
$\angle$ ACB = 118 30

½ 61°30′

30°45′ Tangent.

Sum:

Summe 749°	Tang. 30°45′	Differenz 57°
2.8744818 —	9.7744713 —	1.7558748
		9774471 3
		11.5.3.0.3.4 6.1
		2.8744818
Tang. 2°35′		8.6558643

30°45′ | 30°45′
2 35 | 2 35

∠ ABC = 33°20′ ∠ BAC = 28°10′

179 60′
∠ ACB 118°30′
61°30′ Compl.

Sin. ABC 33°20′	Seit. AC 403°	Sin. Compl. ACB 61°30′
9.7399748 —	2.6042260 —	9.9438985
		2.6042260
		12.54.8.1.2.4.5
		9.7399748
		2.8081497

Die Weite A B = 641°

6. Auf-

6. Aufgabe.

§. 106.

Eine Parallellinie zu ziehen, mit einer Linie zu welcher nicht zu kommen ist; als CE mit AB. Fig. 11. Kupfert. II.

Auflösung.

Zuerst wird eine Standlinie CD angenommen, welche nach der Weite des Objekts proportioniert seyn muß, sonsten die Operation nicht genau zutreffen möchte; sie seye also 150°. Es ist bereits aus der Geometrie bekannt, daß, wenn zwey Parallellinien von einer dritten Linie durchschnitten werden, die Wechselwinkel einander gleich sind, und wenn diese einander gleich, so laufen auch die Linien miteinander parallel; folglichen, wenn der Winkel ABC bekannt, welchen die Linien AB und die Visirlinie BC machen; so darf der Winkel BCE nur dem Winkel ABC gleich gemacht werden; dadurch wird die Linie CE mit AB parallel werden. Dieses zu erhalten muß der Werth des Winkels ABC nach folgender Rechnung gefunden werden, welche von einem jeden der das vorhergehende begriffen, verstanden werden wird.

$\angle = ACD = 120^\circ$] ÷ $\angle BDC = 86^\circ$
$\angle = ACB = 40^\circ$] $\angle ADC = 34^\circ$

$\angle = BCD = 80^\circ$

∠ = BDC = 86°
∠ = BCD = 80

166°
180°

∠ DBC = 14°

Sin. ∠ DBC	Standl. CD	Sin. ∠ BDC
14°	150°	86°
9.3836752 —	2.1760913 —	9.9989408
		2.1760913
		12.2750321
		9.3836752
Seite BC = 778°		2.8913569

∠ ADC = 34°
∠ ACD = 120°

∠ ADC + ACD = 154°
180
154

∠ DAC = 26°

Seite DAC	CD	Sin. ADC
26°	150°	34°
9.6418420 —	2.1760913 —	9.7475617
		2.1760913
		11.9.236530
		9.6418420
Seite AC = 647°		2.2818110

$$CA = 647^\circ$$
$$BC = 778^\circ$$

$CA + BC = 1425$ Summe.

$$BC = 778$$
$$CA = 647$$

$BC - CA = 141$ Differenz.

$\angle$ ACD 120°

180°

$\frac{1}{2}$ 60°

Tang. 30°

Summe	Tang.	Differenz.
1425	30	131
3.1538149 —	9.7614394 —	2.1172713
		9.7614394
		11.8787107
		3.1538149
Tang. $3^\circ 2'$		8.7248958

30°

$3^\circ 2'$ add.

$\angle$ ABC $= 33^\circ 2'$

Wird denn der Winkel ACE dem Winkel ABC gleich gemacht; so wird auch dardurch die Linie EC mit der Linie BA parallel seyn.

7. Auf-

7. Aufgabe.

§. 107.

Wenn zwey Punkten A und B, der eine disseits und der andere jenseits eines Festungswalles lieget, auf dem Wall zwey Stäbe H und I in gerader Linie auszustecken, und zugleich die Weite von A nach B zu messen.

Auflösung.

Die Weise diese Aufgabe auf dem Feld, und zu Hause durch trigonometrische Rechnung aufzulösen; weiset der Herr Professor Andreas Böhm in seiner gründlichen Anleitung zur Meßkunst auf dem Felde, §. 50. welche wegen ihres anderweitigen Nutzens hier mit einzuschalten mir die Freyheit nehme.

§. 108.

Die Operation aber auf dem Felde ist folgende: Es werden auf dem Wall die zwey Stäbe C und E dergestalten eingesteckt, daß sie dem Augenmaaß nach nicht weit von der Linie AB in gerade Linie kommen. In D wird abermals ein Stab eingesteckt, nach welchem man von C nicht nur sehen, sondern auch ohne Hinderniß gerad hinmessen, wie auch von D nach A sehen kan. Auf der andern Seite wird ein Stab in F dergestalt eingesteckt, daß man von demselben nach B, und auch von E nach F sehen und gerade hinzu messen könne. Nachdem die Stäbe eingesteckt; so mißt

mißt man mit einem Astrolab, so in Grade und Minuten getheilet, die Winkel ACD = 39°48′ ADC = 116°52′, DCE = 134°45′, CEF = 118°42′, BEF = 65°32′, und BFE = 85°6′. Darauf mißt man auch die Linien CD = 736′, CE = 1152′, und EF = 464′.

§. 109.

Zuerst soll das Dreyeck CAD berechnet werden, an welchem die Seite CD = 736′, der ∠ ACD = 39°48′, und der ∠ DAC bekannt seyn muß, welcher letztere gefunden wird, wenn man die zwey Winkel des Dreyecks CAD, nemlich ACD = 39°48′ und ADC = 116°52′ zusammen addiret, und die kommende Summe von 180° abziehet so erhält man das Maaß des Winkels DAC 39°48′: da man denn spricht:

Sin. DAC : CD = Sin. ACD = AD
23°20′ : 736 : 39°48 1189′5″

Ich werde hier nur die Sätze beysetzen, dieselbe aber meinen Lesern zum berechnen überlassen, von welchen ich hoffe, daß sie aus dem Vorhergehenden genugsamen Unterricht werden erhalten haben.

§. 110.

Das zweyte Dreyeck EBF, wird wieder berechnet, aus einer bekannten Seite und zwey Winkeln BEF und EBF; die Seite BF soll gefunden werden. Der Satz ist folgender:

Sin.

Sin. EBF : EF = Sin. BEF = BF
29°22′ : 464′ = 65°32′ = 861′2″

§. 111.

An dem Dreyeck CDE, aus dem bekannten Winkel DCE, so von den zwey Seiten CD und CE eingeschloßen, zuförderst die zwey Winkel CDE und CED finden.

EC + CD : EC − CD = Tang. ½
1188 416 =
CDE + CED : Tang. ½ CDE − CED
22°37′30″

kommt vor die halbe Differenz 5°14′48″

Die halbe Summe =	22°37′30″
Die halbe Differenz =	5 14 48
∠ CDE =	27. 52. 18
Die halbe Summe =	22°37′30″
Die halbe Differenz =	5 14 48
∠ CED =	17. 22. 42

Man besehe dessentwegen die dritte Aufgabe von Berechnung der stumpfwinklichten Dreyecken.

§. 112.

Alsdenn kann man aus den Winkeln CED und ECD, und der Seite CD, die Seite ED berechnen.

Sin. CED : CD = Sin. ECD = ED
17°22′42″ : 736′ = 134°45′ (oder vielmehr dessen Cosinus 45°15′ genommen) so erhält man die Seite ED = 1750′.

§. 113.

Mit dem Dreyeck EDF wird verfahren wie bey vorhergehendem Dreyeck CDE; nemlich wenn der Winkel DEF gesucht wird, indem man den ausgerechneten Winkel CED von dem gemessenen CEF abziehet, und aus denen Seiten ED und EF die Winkel EFD und EDF, und hieraus den Winkel EFD und FED und der Seite ED, die Seite FD gesucht wird. Die Rechnung wird nach folgenden Sätzen vorgenommen.

Erster Satz.

ED + EF : ED — EF = Tang. ½ (EFD + EDF
2214′ 1286′ = 39°20′21″ Tang. ½
(EFD — EDF)

Zweyter Satz.

Sin. EFD : ED = Sin. FED : FD = 1896′
64°17′51″ : 1750 = 101°, 19′, 18″ davor den
Cosinus 78°40′42″

§. 114.

Die Berechnung des Dreyecks DFG geschiehet wenn man sich die Winkel FDG und DFG darinnen bekannt macht. Dieses geschiehet

schiehet wenn man ADC, CDE und EDF zusammen addiret und die Summe von 180 Graden abziehet, so erhält man den Winkel FDG. Desgleichen werden auch die Winkel BFE und EFD zusammen gezählet und die kommende Summe von 180° abgezogen so ergiebt sich der Winkel DFG.

ADC =	116°	52′	—″
CDE =	27	52	18
EDF =	13	52	51
	158°	37′	9″
	179°	59′	60″
∠ FDG =	21	22	51″

DFE = 85°6′
EFG = 64.47′51″

149.53.51
279.59.60

∠ DFG = 30°. 6′. 9″

Und weilen der Winkel FGD = 128°31′ oder dessen Cosinus 51°29′; so kann man die zwey Seiten DG und FG suchen.

Erster Satz.

Cosin. DGF : FD = Sin. DFG = DG
51°29′ : 1896′ = 30°6′9″ = 1216′

Zweyter Satz.

Cos. DGF : FD = FDG = FG

51°29′ : 1896 = 21°22′51″ = 883′6″

Die Linie AD und DG, werden zusammen addiret, damit man AG bekomme; desgleichen addirt man auch BF und FG; um BG zu erhalten.

AD =	1189′5″	BF =	861′2″
DG =	1416′ ″	FG =	883 6
AG =	2405′5″	BG =	1744′8″

§. 115.

Aus diesen beyden Seiten und dem Winkel bey G, kann man in dem Dreyeck ABG, zuförderst die Winkel ABG und BAG finden.

AG + GB : AG − GB = ½ Tang.

4150 661′ =

(ABG + BAG:) ½ Tang. ABG—BAG.

25°45′

Die halbe Summe ist = 25°45′

Die halbe Differenz = 4 23 35″

∠ ABG = 30 8 35

∠ BAG = 21°21′25

§. 116.

Und nun kann man aus den Winkeln ABG und AGB, und der Seite AG, die ver-

verlangte Weite AB suchen; und zwar nach folgendem Satz.

Sin. ABG : AG = Cosin. AGB : AB
30°8′35″ : 240′5″ 51°29′ : 3749′

§. 117.

Um nun aber die Stäbe H und I finden, so hat man seine Betrachtung auf das Dreyeck AHD zu werfen.

Sin. AHD : AD = Sin. HAD
41°46′35″ : 1189′5″ 21°21′25″ :
(d. i. BAG) : DH

Nach den Tafeln wird gefunden werden, vor
DH = 650′2″
CD war = 736
CH = 85′8″

Dahero muß in der geraden Linie CD in einer Entfernung von 85′8″, der Stab H eingesteckt werden, welcher mit AB zugleich in gerader Linie stehet.

§. 118.

Zuletzt hat man auf das Dreyeck IBF zu sehen, und folgenden Satz zu machen:

Sin. BIF : BF = Sin. FBI
63°45′25″ 851′2″ = 30°8′35″
(d. i. ABG) : FI

Da wird sich nach den Tafeln geben

FI = 478′1″
und EF war = 464

also ist IE = 14′1′

Also wird in der geraden Linie FE, hinaus in der Entfernung von 14′1″ ein Stab nach F gesteckt, so stehet auch dieser zugleich in der geraden Linie AB.

8. Aufgabe.

§. 119.

Von einer Landschaft eine Charte aufzunehmen. Kupfert. V. Fig. 1.

Auflösung.

Dieser Aufgabe wird ein Genüge geschehen, wenn man verfährt wie in meiner praktischen Geometrie gezeiget habe; da man nemlich die Standpunkten a b auf den erhabensten Oertern, von welchen man am weitesten umher sehen kann, annimmt, und zwar in einer solchen Entfernung, welche der Lage der Ortschaften proportionirt seye. Diese Standlinie a b wird aufs genaueste, und recht horizontal gemessen; darauf richtet man das Astrolab oder ein anderes Winkelinstrument in a, und visiert von da aus alle Winkel, als: cab = 116°13′. dab 86°5′. eab = 36°48′. fab = 45°15′. gab = 89°5′. hab = 136°20′. Weil der Ort i mit a b in gerader Linie lieget so kann selbiger von

hier-

hieraus nicht visirt werden; sondern muß von c und h geschehen, wie bereits in meiner praktischen Geometrie gewiesen habe. Ist man mit dem visieren der Winkel in a fertig, so begiebt man sich mit dem Winkelmeßinstrument in b, und visirt von hieraus wieder nach allen denen Orten, nach welchen aus a visirt worden, nemlich: c b a = 34°. d b a = 46°15'. e b a = 110°45'. f b a = 106°17'. g b a = 67°30'. h b a = 42°25'.

§. 120.

Nun haben wir die Seiten der Dreyecke zu finden und weil allezeit zwey bekannte Winkel und eine bekannte Seite, aus welchen die übrige Seiten, und der dritte Wintel leichtlich zu finden bekannt sind; so sind selbige leichtlich zu berechnen: denn wenn die zwey bekannte Winkel zusammen addiret werden, und die Summe wird von 180 Graden abgezogen, so erhält man den Winkel, so der bekannten Seite oder Standlinie entgegen lieget; durch welchen man hernach die übrige Seiten des Dreyeckes berechnen kann.

Z. B. In dem Dreyeck c a b soll die Seite a c gefunden werden.

Die Standlinie a b ist = 1536°
Die zwey bekannte Winkel sind, der

$\angle$ c a b = 116°13'
$\angle$ c b a = 34°
150°13'

$$\begin{array}{r} 179^\circ 60' \\ 150^\circ 13' \\ \hline \angle\, acb = 29^\circ 47' \end{array}$$

Sin. ∠ abc	Standl. ab	∠ Sin. cba
29° 47′	1535°	34°
9.6961130 =	3.1863912 =	9.7475617
		3.1863912
		12.9339529
		9.6961130
	Seite ac = 1729°	3.2378399

Sin. acb	Standl. ab	Cosin von bac
29° 47	1536°	63° 47′
9.6961130 =	3.1863912 =	9.9528553
		3.1863912
		13.1392465
		9.6961130
	Seiten bc = 2774°	3.4431335

Im Dreyeck dab.

$$\begin{array}{r} \angle\, dab = 86^\circ\ 5' \\ \angle\, dba = 46\ \ 15 \\ \hline 132^\circ 20' \\ 179\ \ 60 \\ \hline \angle\, adb = 47^\circ 40' \end{array}$$

Sin.

Sin. adb	Standl. ab	Sin. dba
47°40′	1536°	46°15′
9.8687851 =	3.1863912 =	9.8587561
		3.1863912
		13.04.5.1.473
		9.8687851
Seite ad = 1500°		3.9763622

Sin. adb	Standl. ab	Sin. bad
47°40	1536	86°5′
9.8687851 =	3.1863912 =	9.9989845
		3.1863912
		13.1853757
		9.8687851
Seite bd = 2072°		3.3165906

§. 121.

Und auf diese Weise verfährt man auch mit der Berechnung der übrigen Dreyecken. Wollte oder begehrte man aber zu wissen, wie weit ein Ort z. B. c von d entfernet seye; so wird auf folgende Art verfahren.

$\angle$ cab — dab

$\angle$ cab = 116°13′
$\angle$ dab = 86 5

$\angle$ cad = 30 8
179°60′

½ 149°52

½ Tangent. = 74°56′

ac + ad

ac = 1729
ad = 1500

Summe = 3229

ac — ad

ac = 1729
ad = 1500

Differenz = 229

Summe	½ Tang.	Differenz
3229	74°56	229
3.5090680 =	10.5699303 =	2.11 05897
		10.56 99303
		12.68.05200
		3.50 90680
	Tangent = 8°26′	9.17 14520

74°56′
8 26

$\angle$ adc = 83°22′

74°56′
8 26

$\angle$ acd = 66°30′

$$\begin{array}{r} 83^\circ 22' \\ 66^\circ 30 \\ \hline 149\ 52 \\ 179\ 60 \\ \hline \end{array}$$

$\angle$ cad = 30° 8

Sin. $\angle$ acd 66°30′	ad 1500	Sin. $\angle$ cad 30°8′
9.9623978 =	3.1760913 =	9.7007 1 58
		3.1760 9.13
		12.8768.0.71
		9.9623 9 78
Seite cd = 821°		2.9144 0 93

9. Aufgabe.

§. 122.

Eine irregulare Figur um welche man nur von aussen herum messen kann in Grund zu legen, und deren Flächen Inhalt zu finden. Kupfert. V. Fig. 2.

Auflösung.

Es werden alle Winkel und Linien um den ganzen Umkreiß gemessen welche folgende Maaße haben: Als

Win-

Winkel.		Linie.	
abc	= 89°30′	ab	= 365′
bcd	= 94 —	bc	= 532′
cde	= 92 45	cd	= 216
dea	= 165 39	de	= 409
eab	= 98 15	ea	= 341
	540 Grad.		

§. 123.

Will man wissen ob die Winkel recht gemessen, so darf man sie nur zusammen addiren geben 540°. Werden 180° mit der Anzahl der Ecken weniger zwey multiplicieret als die Figur hat; als hier haben wir ein Fünfeck vor uns, müssen also 180 mit 3 multiplicieren, kommen 540°, sind also die Winkel recht beobachtet worden.

Nun kann die Figur 2 in drey Dreyeck getheilt werden, als in abc, cde und aec.

§. 124.

Wir wollen zuerst das Dreyeck abc berechnen, an welchen die zwey Seiten ab und bc, und der darzwischen liegende Winkel abc bekannt. Es wird also nach den oben bereits abgehandelten Aufgaben verfahren, welche lauten: wenn an einem Dreyeck die zwey Seiten und der darzwischen liegende Winkel bekannt, die Seite ac finden.

Dreyecke abc.

bc + ab	bc − ab
Seite bc = 532′	Seite bc = 532
Seite ab = 365	Seite ab = 365
Summe = 897	Differenz = 167

$$\angle abc = \begin{array}{r} 179°60' \\ 89°30 \\ \hline \tfrac{1}{2}\ \ 90°30' \end{array}$$

$\tfrac{1}{2}$ Tang. = 45°15′

Summe	½ Tang.	Differenz
897′	45°15′	167
2.9527924 −	10.0037900 −	2.2227165
		10.0037900
		12.2.26.5.065
		2.9527924
	10°38′ Tangent.	9.2737141

+		−	
	45°15		45°15′
	10 38		10°38
∠ bac = 55°53′		∠ bca = 34°37′	

Sin.

Sin. bac	bc	Sin. abc
55°53′	532′	89°30′

9.9179764 — 2.7259116 — 9.9999835
2.7259116

12.7258951
9.9179764

Seite ac = 642′ 2.8079187

Dreyeck aec.

∠ eab = 98°15′
∠ cab = 55 53

42°22′
179°60′

½ 137°38′

68°49 = ½ Tangent.

ac = 642
ae = 341

ac + ae = 983 Sum.

ac = 642
ae = 341

ac — ae = 301 Differenz.

Summe	½ Tangent	Differenz
983	68°24′	301

2.9925535 — 10.4023838 — 2.4785665
10.4023838

12.8809503
2.9925535

Tangent = 37°43′ 9.8883968
68

68°24′	68°24
37 43	37 43
∠ cea = 106 7	∠ ace = 30°41

106° 7′
30°41
136°48′
179 60

∠ eac = 33°12′

Cosin. cea 73°53′	Seite ac 642′	Sin. eac 33°12′
9.9825871 :	2.8075350 =	9.7384343 :
		2.8075350
		12.5459693
		9.9825871
Seite ec = 365′		2.5623822

§. 125.

Da wir nun die zwey Seiten ac und ec bekannt haben, welche als zwey Diagonale zu betrachten, durch deren Hülfe man das Feld leichtlich aufs Papier bringen und nach Anleitung der Geometrie berechnen kann, weil an einem jeden Dreyeck die drey Seiten bekannt sind; so kann auf diese Weise jede Figur behandelt werden. Und hiemit werden wir von dem Gebrauch und Anwendung der Trigonometrie bey Messung der Weiten und Flächen, deutlich genug gehandelt haben, wenden uns also zur

Messung

Messung der Höhen und Tiefen.

1. Aufgabe.

§. 126.

Die Höhe eines Thurns messen, welcher auf einer Ebene stehet, und wo man zu dem perpendikularen Fuß desselben kommen kann. Kupfert. VI. Fig. 1. a

Auflösung.

Von dem Fuß des Thurns B wird nach C zurück gemessen, versteht sich in gerader Linie bis man das Eck A des Thurms erblicket. In C wird hernach das Astrolab, und zwar vertikal also aufgestellet, daß die unbewegliche Absichten mit dem Horizont parallel seyen, das ist, die visirte Linie DE muß von der horizontalen überall gleich weit entfernet seyn. Dieses zu erhalten muß man sich eines Sinkels bedienen welcher bey dem 90sten Grad einspielen muß. Wenn dieses geschehen, so wird mit den beweglichen Absichten nach der Höhe des Thurns A visiert, so erhält man das Maaß des Winkels ADE. Darauf wird die horizontale Linie BC = ED gemessen, so ist die Operatidn auf dem Felde verrichtet.

§. 127.

Ehe wir zeigen, wie die Trigonometrie bey Messung der Höhen anzuwenden; wollen wir zuvor

zuvor Anweisung geben, wie man solche Messungsarten ohne Rechnung zu Papier bringen kann, um auch denjenigen dienstlich zu seyn, welche sich mit trigonometrischen Rechnungen nicht abgeben wollen.

§. 128.

Z. B. Der Winkel ADE seye 33°, und die Linie BC = ED 35 Schuh. Man ziehe auf dem Papier in gerader Linie de Fig. 1. b nach dem verjüngten Maaßstab, welche gleiche Länge mit ED oder 35 Schuhen hat. Bey e wird eine Perpendikularlinie ea errichtet, und bey d der mit dem Astrolab gemessene Winkel von 33° aufgetragen, und die Linie da darnach gezogen; so wird nach dem verjüngten Maaß die Linie ae so lang seyn, als AE 20(′ nach dem großen. Es muß aber um die ganze Höhe des Thurms AB zu finden die Höhe des Instruments von 5 Schuh darzu addirt werden, so wird man 25′ erhalten.

Nach der Trigonometrie.

§. 129.

Der Winkel ADE = 30°

Die Linie DE = 35 Schuh.

Weil bey E ein rechter Winkel ist, so ist der Winkel A leicht zu finden; denn man darf nur den Winkel B von 90° abziehen; so ergiebt sich der Winkel A.

$$\angle \text{ rect} = 90^\circ$$
$$\angle \text{ ADE} = 30^\circ$$
$$\angle \text{ DAE} = 60^\circ$$

Wir sollen die Höhe A E finden: Man sagt also; wie der Sin. des Winkels A zu DE, so ist der Sin. des Winkels D zu AE.

Sin. ∠ DAE 60°	DE 35′	Sin. ∠ ADE 30°
9.9375306 —	1.5314789 —	9.6989700
		1.5314789
		11.2304489
		9.9375306
		1.2929183

AE = 20′
Höhe des Inst. = 5′

Höhe des Thurms = 25′

§. 130.

Wenn aber der Thurm eine Spitze hat, und man will selbigen aus einem Stand messen, so muß auch aus der Mitte desselben, wo nemlich der Perpendikul von der Spitze herunter fällt, die Standlinie gemessen werden.

2. Aufgabe.

§. 131.

Eine Höhe messen, welche auf einem Berg an steigenden oder abfallenden Boden

den

den stehet, da man aber zu dem Punkt so unter der Spitze stehet kommen kann. Kupfert. VI. Fig. 2. a.

Auflösung.

Das Astrolab wird in beliebiger Entfernung bey F aufgestellt, und vertikal gerichtet, doch daß die unbewegliche Absichten recht horizontal stehen, damit man nach I visiren könne. Darauf werden die Winkel GKI und HKI, wie auch die Linie FG gemessen.

Wenn man nun diese Höhemessung zu Hause zu Papier bringen will, so wird auf demselben die Horizontallinie ki, Fig. 2. b. gezogen, und darauf die Winkel gki und hki getragen. Auf ki wird bey k die Perpendikulare kf errichtet, und die Höhe des Instruments nach dem verjüngten Maaß darauf getragen. Ferner wird von dem kleinen Maaß so viel abgenommen als FG im Großen gehabt, und setzt den einen Fuß des Zirkels in f, sticht auf der Linie kg, den Punkt g ab, und ziehet fg. Endlich wird auf der Linie ki mit dem Punkt g eine Perpendikulare hi errichtet, so wird gh so groß nach dem kleinen Maaß seyn, als GH nach dem großen.

§. 132.

Wenn aber das Astrolab höher stehet wie Fig. 2. c zu sehen, so muß man den Winkel hki über die Horizontallinie ki, und den Winkel gki unter dieselbe setzen, und auf die

durch diesen Winkel entstandene Linie, das Maaß der Linie fg abstechen, und die Perpendikulare gh aufrichten, welche die Höhe vorstellet.

Berechnung nach der Trigonometrie.

§. 133.

Z. B. FK = 5′, FG = 33′, GKI = 9°30′, HKI = 38°30′, GKF = 97°30′.

Aus diesen bekannten Sachen soll die Seite GK, in dem Dreyeck FGK gefunden werden, und zwar nach folgenden Sätzen.

Erster Satz.

FG	Cosin. GKF	FK
	179°60′	
	97 30	
33′	82°30′	5′
1.5185139 —	9.9962686 —	0.6989700 0
		9.996268 6
		10.695238.6
		1.518513 9
		9.176724 7

Ist also der ∠ FGK 8°38′

∠ GKF = 97 30

106 8

abgezogen von 179°60′

∠ KFG = 73°52′

Cosin.

Cosin. GKF	FG	Sin. KFG
82°30′	33′	73°52′
9.9962686 —	1.5185139 —	9.9825506
		1.5185139
		11.5010645
		9.9962686
GK = 31′		1.5047959

§. 134.

In dem rechtwinklichten Dreyeck HKI ist bekannt der Winkel HKI = 38°30′, welchen man von 90 Graden abziehet, so bleiben 51°30′ vor den Winkel KHI übrig. Ziehet man ferner den Winkel GKI = 9°30′ von HKI 38°30′ ab, so erhält der Winkel HKG = 29°, folglich kann man in dem Dreyeck HKG die Seite oder Höhe HG finden.

Zweyter Satz.

Sin. KHI	KG	Sin. HKG
51°30′	61′	29°
9.8935444 —	1.4913617 —	9.6855712
		1.4913617
		11.1769329
		9.8935444
Die Höhe GH = 16′		1.2833885

3. Aufgabe.

§. 135.

Eine Höhe zu messen welche zwar auf der Ebene stehet, zu deren Fuß man aber nicht kommen kann. Kupfert. VI. Fig. 3.

Auflösung.

Wenn man nicht zu dem Fuß einer Höhe z. B. des Thurnes EB kommen kann, so muß man aus zweyen Ständen messen. Dieses ist auch bey allen andern Höhen welche pyramidalisch seyn, als Berge, Häuser u. d. g. zu beobachten.

Dahero muß man die zwey Stände C und D in beliebiger Entfernung erwählen, und zu erst das Astrolab in A aufstellen, dasselbe vertikal stellen, und die unbewegliche Absichten horizontal richten, damit die Visierlinie CD mit dem Horizont AB recht gleich weitlaufend seyn. Wenn nun das Astrolab gehörig gerichtet, so wird bey A der Winkel FCE visiert. Darauf wird das Astrolab in G gebracht, und wenn dasselbe gehörig gestellet und gerichtet, wird der Winkel FDE visieret, und die Standlinie AG = CD gemessen, und auch die Höhe des Astrolabs angezeichnet.

Von dem Auftragen auf das Papier werde hier weiter nichts gedenken, weil ich hoffe, daß wer die vorhergehende Aufgaben recht verstehen

wird;

wird; selbiges von selbsten werde verrichten können, ich wende mich also zu der

Trigonometrischen Rechnung.

§. 136.

Unsere bekannte Linien und Winkel sind folgende: ∠ ECD = 30°, ∠ EDF = 55° und AG 306′. Also ist CDE = 125°, und folglich CED = 25°. (Denn wenn man 125° und 30° zusammen addiret kommen 155°, ziehet man dieselbe von 180° ab, so bleiben 25°). Nun spricht man wie

Sin. CED 25°	zu CD = AG 306′	also Sin. ECD = 30°
9.6259483 —	2.4857214 —	9.6980700
		2.4857214
		12.1846914
		9.6259483
DE = 361′.		2.5587431

Sin. tot. EFD 90°	DE 361′	Sin. EDF — FE 55°
10.0000000 —	2.5575072 —	9.9133645
		2.5575072
		12.4708717
		10.0000000
		2.4708717

Die Höhe FE = 295′
darzu die Höhe
des Astrolabs BF = 5′,

300 = der ganzen Höhe des Thurms EB.

4. Aufgabe.

§. 137.

Eine Höhe messen zu deren Fuß oder dem untersten Theil man nicht kommen kann, und auf einem abhangenden Boden stehet. Kupfert. VI. Fig. 4.

Auflösung.

Diese Aufgabe aufzulösen, muß man nebst dem Astrolab noch einen runden Stab haben, so 5′ hoch und unten mit einer eisernen Spitze beschlagen ist, an welchem man eine kleine hölzerne Tafel, mittelst einer Stellschraube auf und ab schieben, und wo man es nöthig hat fest schrauben kann. Diese Tafel ist in vier Felder eingetheilt, und kann ohngefehr 1(′ ins gevierte haben; die Felder sind schwarz und ein weißes Kreuz darauf gemalet, wie Fig. 5. zu sehen.

§. 138.

Wenn man nun die Höhemessung vornehmen will; so wird das Astrolab zu erst in A aufgestellt, und die unbewegliche Dioptern horizontal gerichtet, und dardurch die Linie CE visie-

visieret. Alsdenn mißt man von der Erde an die Höhe bis an den Mittelpunkt des Astrolabs AC mit dem Stab ab, das Kreuz wird in B aufgesteckt, und zwar in gerader Linie mit der zu messenden Höhe und dem Astrolab, der Stab womit die Höhe des Astrolabs gemessen worden, wird an das Kreuz angehalten, und daher so lange hin und her geschoben, bis dessen Mittelpunkt in D eben die Höhe hat, wie das Astrolab bey C. Hernach werden die Winkel GCE, DCE und HCE sammt der Standlinie AB = CD gemessen. Darauf wird das Kreuz von B hinweg gebracht, an dessen Stelle aber das Astrolab aufgestellt, daß der Mittelpunkt eben daselbsten stehe, wo das Kreuz gewesen ist, das will sagen es muß eben so hoch stehen als zuvor, und die unbewegliche Absichten horizontal, und nach DF gerichtet seyn. Aus dem Stand D wird hernach nach der Spitze G visiert, wie auch nach dem Fuß H des Thurms, wordurch man die Winkel GDF und HDF erhält; und auf diese Weise ist man mit der Operation auf dem Felde fertig.

§. 139.

Nun kann man nach denen bekannten Winkeln und Linien folgende Berechnung vornehmen. Es seyen z. B. die Winkel GCE = 28°, DCE = 6°, ECH 5°, GDF = 36°30′, FDH = 21° und CD 170′. Will man nun den Winkel CDF wissen, so wird der Winkel DCE = 6° von 180° abgezogen,

so kommen 174° vor den Winkel CDF, zu welchem man den Winkel GDF = 36°30′ addirt, kommen 210°30′. Diese werden von 360 abgezogen, bleiben 149°30′ = ∠CDG. Werden die 149°30′ von 180 abgezogen, blei- bleiben vor den ∠GCD = 30°30′, darzu CDG addirt, geben diese 170°, und diese von 180 abgezogen, kommen 10° vor den Winkel CGD.

Nun wird gesprochen der

Sin. CGD	CD	Sin. GCD — GD
10°	170′	30°30′
9.2396702 —	2.2304489 —	9.7054689
		2.2304489
		11.9.3.59.178
		9.2396702
DG = 496′		2.6962476

§. 140.

In dem Dreyeck CDH sind bekannt die Winkel DCH = DCE + ECH = 11°. Auch weiß man daß CDH = CDF — FDH = 153°, dahero bleiben 60° vor den Winkel CHD. Nun sagt man

Sin.

Sin. CHD	CD	Sin. DCH—DH
16°	170′	11°
9.4403381 —	2.2304489 —	9.28 0 59 88
		2.23 0 44 89
		11.51.1.04.77
		9.44 0 33 81
DH = 117′		2.07 0 70 96

§. 141.

Und da man in dem Dreyeck DHG bekannt hat die zwey Seiten DG = 496 und DH = 117, und der ∠ GDH = GDF + FDH = 57°30′. Die beyde andere Winkel aber 122°30′ halten, wenn man die 57°30′ von 180° abziehet; so wird weiters verfahren, wie bereits oben gezeiget worden; doch wollen wir der Deutlichkeit wegen die ganze Rechnung beysetzen.

DG = 496	DG = 496
DH = 117 add.	DH = 117 subtr.
613 = Summe.	379 = Differ.

$$\begin{array}{r} 179°60' \\ 57\ 30 \\ \hline 122°30' \\ \hline \tfrac{1}{2}\quad 61°15' \end{array}$$

Sum-

Summe	½ Summe	Differenz
DG + DH	Tang.	GH - DH
613	61°15′	379
2.7874605 —	10.2607293 —	2.5786392
		10.2607293
		12.8393685
		2.7874605
		10.0519000

Die halbe Differenz = 48°24′
Die halbe Summe — 61°15′

Der größere ∠ DHG = 109°39′

Sin. DHG	DG =	Sin. GDH
109°39	496 =	57°30′
70°21′		
9.9739422 —	2.6954817 —	9.9260292
		2.6954817
		12.6215109
		9.9739422
GH = 444(′		2.6475687

§. 142.

Um nun die Perpendikular GI zu finden, so wird ferner also verfahren: weil man in dem Dreyeck GHI, die Seite GH und den rechten Winkel bey I bekannt hat, und daher den Winkel GHI erfahren kann: denn DF und HK sind einander Parallel, also FDH + DHK = 180°. Der ∠ FDH hält aber

21°.

21°, und wenn diese von 180 abgezogen werden, bleiben noch 159° vor den Winkel DHK übrig, zieht man von diesem den Winkel DHG = 109°39′ hinweg, bleibt der Winkel GHI = 49°21′ übrig.

Nun spricht man

Sin. GIH	= Sin. tot. GH	Sin. GHI
90°	444	49°21′
10,0000000	= 2.6473830	= 9.8800719
		2.6473830
		12.5274549
		10.0000000
Die Höhe GI = 336′		2.5274549

5. Aufgabe.

§. 143.

Die Höhe eines Thurms oder ein anders Objekt messen, so auf einem Berg stehet, und man auf den Berg nicht kommen kann. Kupfert. VI. Fig. 5.

Auflösung.

	179°60′	136°45	= ∠ ORS] ad-
∠ SRV =	43 15	34 −	= ∠ SQR] dirt
∠ QRS =	136°45′	170°45′ Summe.	

179°60′	Summe]	abgezogen
170°45′		
9°15′ = ∠ QSR		

Sin.

Sin. QSR	QR	Sin. ∠SQR
9°15′	140′	34°
9.2061309 —	2.1461280 —	9.7475617
		2.1461280
		11.8936897
		9.2061309
RS = 487′		2.6875588

90° = ∠ rect.
43°15′ = ∠ SRV
46°45′ = ∠ RSV

90 = ∠ rect.
33°30° = ∠ TRV
56°30′ = RTV.

180 —
56°30′ = RTV
123°30′ = ∠ RTS

123°30′ = RTS
46 45 = RSV
170°15′ Summe.

179°60′
170 15′ Summe
. . 9°45′ = ∠ SRT

Cosin ∠ RTS	RS	Sin. ∠ SRT
179°60′	487′	9 45′
123 30		
56°30′		
9.9211066 —	2.6875290 —	9.2287839
		2.6875290
		11.9163129
		9.9211066
Höhe des Thurms ST = 98(′		1.9952063

6. Auf-

6. Aufgabe.

§. 144.

Die Höhe eines Thurms von einem gegenüber liegenden Gebäude zu messen. Kupfert. VII. Fig. 1.

Auflösung.

Hier wird die Höhe der Altane OP bis wo das Instrument bey P stehet gemessen. Das Astrolab wird vertikal gerichtet, wie bereits zum öftern gesagt worden, und der Winkel MPN wird visiret. Desgleichen werden die zwey Winkel MPO und MOP visiert; aus welchen bekannten Winkeln und der bekannten Seite OP die Höhe des Thurms zu finden stehet, wie folgende Rechnung zeiget.

OP = 110′
∠ MPN = 29°15′
∠ MOP = 100°30′
∠ MPO = 61°10′

∠ MOP = 100°30′		179 60
∠ OPM = 61 10		161 40
161 40	Sum.	18°20 = ∠ OMP

Sin.

Sin. ∠ OMP	OP	Cosin von MOP MP
18°20′	110′	79°30′
9.5014764 —	2.0413927 —	9.992 6 661
		2.041 3 927
		12.034.0.588
		9.501 4 764
MP = 340′		2.532 5 824

Sin. tot. N	MP	Sin. MPN
90	340	29°15′
10.0000000 —	2.5314789 —	9.6889723
		2.5314789
		12.2204512
		10.
		2.2204512

Höhe MN = 169′
Höhe des Inst. = 5

Ganze Höhe des Thurms = 171′

7. Aufgabe.

§. 145.

Die Höhe eines Berges messen, mittelst einer Standlinie welche längs dem Berge auf der Ebene hingemessen wird. Kupfertaf. VII. Fig. 2.

Auf-

Auflösung.

Unten auf der Ebene des Berges wird die Standlinie EF gemessen, und in dem Stand E nach dem das Astrolab gehörig gestellet, der ∠ GEF visiert. Alsdenn wird das Instrument nach F gebracht, und die Winkel EFG und FGH visiert; wornach die Rechnung vorgenommen werden kann.

Standlinie = 300′

∠ GEF =	97°45′	179°60′
∠ EFG =	47 —	144°45′ Summe
	144°45′	35°15 ∠ EGF

179°60′
97°45′
82°15′ Cosinus oder Compl. von FEG

Sin. ∠ EGF	EF	Cosin. FEG
35°15′	300′	82°15′
9.7612851 —	2.4771212 —	9.9960149
		2.4771212
		12.473.1.361
		9.7612851
FG = 515′		2.7118510

Sin. tot. H	F G	Sin. G F H
90°	515′	41°30′
10.0000000 —	2.7118072 —	9.8212646
		2.7118072
		12.5330718
		10.
Des Berges Höhe GH = 341(		2.5330718

8. Aufgabe.

§. 146.

Die Tiefe eines Thales zu messen. Kupfert. VII. Fig. 3.

Auflösung.

Bey diesem und andern dergleichen Beyspielen wird auf dem Berg eine Standlinie T V angenommen und aus den beyden Ständen V und T die Winkel T V W und V T W visieren, weil in W das Kentbare Zeichen eines Baumes stehet. Das Astrolab muß aber so gebogen werden, daß dasselbe bey dem visieren der Winkel, dem sich vorstellenden Dreyeck W T V ganz parallel stehe. Wenn aber in dem Stand T der Winkel W T S visiert wird, so wird das Astrolab vertikal gerichtet, wie sonsten zu geschehen pflegt; da man alsdenn die Rechnung vornehmen kann.

Stand-

Standlinie TV = 115′

$\angle$ TVW = 75°15′   179 60
$\angle$ VTW = 89 30   164 45

164 45 Sum. 15°15 $\angle$ VWT

Sin. $\angle$ VWT	VT	Sin. TVW – TW
15°15′	115′	15°15′
9.4200073 –	2.0609678 –	9.9854471
		2.0609678
		12.0464149
		9.4200073
TW = 423′		2.6264076

$\angle$ WST = 90°   180
$\angle$ STW = 67°   175

WST + STW = 157°   23° = $\angle$ TWS

Sin. tot. S	TW	Sin. TWS = TS
90°	423	23°
10.0000000 –	2.5092025 –	9.5918780
		2.5092025
		12.1010805
		10.
Tiefe des Thals oder Berges TS = 126′.		2.1010805

9. Aufgabe.

Die Tiefe eines Grabens oder Bronnens zu messen. Kupfert. VII. Fig. 4.

Auflösung.

§. 147.

Man muß die Breite des Bronnens AB bekannt haben, und so auch die Breite des Grabens wenn dessen Tiefe gemessen werden solle. Hernach wird das Instrument bey A senkrecht angehänkt, und der Winkel BAC visiert; nemlich die unbewegliche Absichten (Dioptern) muß dem Horizont gleich, und das Astrolab über sich gekehret seyn, da man denn mit den beweglichen Absichten den Winkel BAC indem man nach C visiret, beobachtet. Weil aber durch dieses Visieren der äussere Winkel bekannt wird, wir aber den innern haben müssen, so muß der gefundene Winkel von 180 Graden abgezogen werden, damit man erstern erhalte, aus diesen bekannten Daten entstehet hernach folgende Rechnung.

Z. B. Der äußere Winkel seye gleich 116°, so werden selbige von 180° abgezogen
116°

bleiben 64° vor den innern Winkel BAC. Weil nun bey A ein rechter Winkel ist; so sagt man wie

Sin.

Sin. tot. C	Breite AB	Tang. BAC
90°	12′	64°
10,0000000 —	1,0791812 —	10.3118182
		1.0791812
		11.3909994
		10.
Die Tiefe des Bronnens ist = 24′.		1.3909494

10. Aufgabe.

§. 148.

Die Tiefe eines Thurm messen. Kupfertafel VII. Fig. 5.

Auflösung.

Diese Aufgabe wird aufgelößt, wie die vorhergehende, wenn man oben auf dem Thurm eine Standlinie DE annehmen kann.

Z. B. Die Standlinie DE seye 36′ und der äussere Winkel EDF 120°.

180
120
———
60° = dem innern Winkel EDE.

Sin. tot.	DE	Tang. EDE.
90°	36	60°
10,0000000 —	1,5563025 —	10.2.385606
		1.5563025
		11.7948631
		10.
Tiefe des Thurms EF 62′.		1.7948631

Anmerkung.

§. 149.

Hier könnte man einwerfen, daß die Tiefe eines Grabens, Bronnens, Thurms u. d. gl. leichter mit dem Senkel gemessen werden könnte, welches an sich wahr ist. Alleine hier handeln wir nicht von einem mechanischen Messen; sondern wie durch Hülfe der Trigonometrie, die Längen, Höhen und Tiefen, ohne eine von diesen zu messen durch Rechnung zu finden seye. Und hiemit will ich auch diese Arbeit beschliessen, in Hoffnung daß der geneigte Liebhaber hinreichenden Unterricht darinnen finden werde, um seine Wißbegierde von dieser edlen Wissenschaft zu stillen.

Innhalt

Innhalt
der abgehandelten Materien.

Erklärungen.

Was die Trigonometrie seye. Seite 15

Anmerkung, worinnen angezeiget wird, wie viel Stücke in einem Dreyeck vorhanden, und wie viel derselben nöthig sind, wenn man ein Dreyeck trigonometrisch berechnen will. ibid. Was ein bekanntes Eck, oder eine bekannte Seite genennet wird. 16. Wie Grade und Minuten mit gewissen angenommenen Karaktern zu bezeichnen sind. ibid. Was ein Bogen seye. ibid. Von der Chorde oder Subtense. 17 Was man den Sinus nennt. ibid. Von dem Sinus des Komplements, oder dem Cosinus. 18. Vom Sinus versus. ibid. Was der Sinus totus. ibid. Vom Tangenten. ibid. Vom Contangenten. 19. Vom Sekanten. ib. Was das Komplement eines Bogens sey. ibid.

Von den Grundsätzen der Trigonometrie.

1. Grundsatz. Wie viel Grade in einem jeden Dreyeck enthalten. 20.

2. Grundsatz. Ein Dreyeck welches zwey gleiche Seiten hat, hat auf der Basis auch zwey gleiche Winkel. 21. Beweiß davon. ibid.

3. Grundsatz. Worinnen bewiesen, daß wenn auf eine Linie eine gerad oder schrög gezogen wird, die zwey Winkel zusammen 180 Grade machen. 21. Der Beweiß. 22.

4. Grundsatz. Von den Wechselwinkeln. ibid. Beweiß davon. ibid.

5. Grundsatz. Worinn gezeiget wird, daß wenn die Seite eines Dreyecks verlängert wird, der äussere Winkel eben so groß seye, als die beyde innern. 23. Beweiß. ibid.

6. Grundsatz. Enthält den pytagorischen Lehrsatz. ibid. Beweiß darüber. 24.

7. Grundsatz. Von dem Verhältniß der Seiten in den flachlinichten Dreyecken. ibid. 1. Beweiß. 25. 2. Beweiß. ibid 3. Beweiß. 26

8. Grundsatz. Von dem Maaß der Sinus, Tangenten und Sekanten. 27.

9. Grundsatz. Das der Sinus eines spitzigen Winkels auch der Sinus des stumpfen seye. ibid.

10. Grundsatz. Der Sinus versus ist der Unterscheid zwischen dem Sinus totus und Sinus Complementi. ibid.

11. Grundsatz. Was der Sinus totus, und der Tangent in einem rechtwinklichten Dreyeck seye. ibid.

12. Grundsatz. Wenn die Hypothenus der Radius in einem rechtwinklichten Dreyeck ist, welche Seite hernach Sinus rektus werde. 28.

Von

Von denen Lehrsätzen.

1. Lehrsatz. Von der Sehne oder Chorde. 28. Beweiß, ibid.
2. Lehrsatz. Von dem Verhältniß der Seiten gegen die Sinus der Winkel. 29. Beweiß darüber. ibid.
3. Lehrsatz. Von dem Verhältniß der Differenzen der Stücke. 30. Beweiß. ibid.
4. Lehrsatz. Handelt ebenfalls von den Verhältnissen der Summen zweyer Seiten zu der Differenz. 31. Beweiß. 32.
5. Lehrsatz. Enthält ebenfalls Verhältnisse der Summe und Differenz. 33. Beweiß. 34.

Praxis der Trigonometrie.

Von dem Gebrauch der logarithmischen Tabellen. 34.
1. Aufgabe. Einer gegebenen Absolutzahl ihren Logarithmen finden, so noch in der Tabelle stehet. 36.
2. Aufgabe. Den Logarithmen zu einer Zahl zu finden, welche grösser ist, als die Tabelle gehen. 37.
3. Aufgabe. Wenn der Logarithmus gegeben, seine Absolutzahl zu finden. 39.
4. Aufgabe. Den Logarithmen zu einem Bruch zu finden. 40.
5. Aufgabe. Zwey Zahlen durch Hülfe der Logarithmeu zu multiplicieren. 41.
6. Aufgabe. Durch Hülfe der Logarithmen eine Zahl in die andere theilen. 42.

7. Aufgabe. Eine gegebene Zahl zu einer bestimmten Potenz zu erheben. 42.
8. Aufgabe. Aus einer gegebenen Zahl entweder die Quadrat oder Kubikwurzel, durch Hülfe der Logarithmen ausziehen. 43.
Von den Logarithmen der Sinus und Tangenten und wie solche gebraucht werden. 45.
1. Aufgabe. Zu einem gegebenen Winkel in Graden und Minuten, seinen Sinus und Tangenten in den Tabellen finden. 46.
2. Aufgabe. Den Logarithmus, Cosinus und des Contangenten für eine gegebene Zahl an Graden und Minuten finden, welcher in den ältern Tabellen, z. B. des Blacks nicht verzeichnet sind. 47.
3. Aufgabe. Den Sinus oder Tangenten eines Winkels finden, welcher größer als die Tabellen enthalten. 48.
4. Aufgabe. Den Logarithmus Sinus zu finden, wo Grade, Minuten und Sekunden beysammen sind. 49.
5. Aufgabe. Wenn der Logarithmus Sinus gegeben, die ihme respondirende Anzahl Graden, Minuten und Sekunden finden. 51.

Von der Berechnung der Dreyecke.

Erster Abschnitt.

Von den rechtwinklichten Dreyecken.

1. Aufgabe. Wenn in einem rechtwinklichten Dreyeck zwey Seiten, und der rechte Winkel bekannt, die übrige Winkel zu finden. 54.

2. Auf-

2. Aufgabe. In einem rechtwinklichten Dreyeck seye bekannt die Basis und der Winkel so dem Tangenten gegenüber stehet. 55.
3. Aufgabe. An einem rechtwinklichten Dreyeck seye bekannt eine Seite und ein Winkel den Sekanten zu finden. 56.
4. Aufgabe. In einem rechtwinklichten Dreyeck seye bekannt ein Winkel und eine Linie, die andern Linien zu finden. 57.
5. Aufgabe. Aus zwey bekannten Winkeln und einer Seite, die dem Winkel gegenüber stehende Seite zu finden. 58.
6. Aufgabe. Es seye an einem rechtwinklichten Dreyeck bekannt die Winkel a c b und die Seite a b, die Seite b c finden. 59.
7. Aufgabe. In einem rechtwinklichten Dreyeck seye bekannt der Winkel a c b und die Seite a b, die Seite a c zu finden. 59.

Zweyter Abschnitt.

Von denen scharf- oder spitzwinklichten Dreyecken.

1. Aufgabe. In einem scharfwinklichten Dreyeck seyen bekannt zwey Winkel und eine Seite, um eine andere Seite zu finden. 60.
2. Aufgabe. Wenn an einem scharfwinklichten Dreyeck bekannt zwey Winkel, und die Seite d e, die Seite f e finden. 61.
3. Aufgabe. In einem spitzwinklichten Dreyeck sind bekannt zwey Seiten und dem darzwischen liegenden Winkel, die dritte Seite finden. 62.

4. Auf-

4. Aufgabe. In dem spitzwinklichten Dreyeck d e f, seyen bekannt die zwey Seiten e f und d e, sammt dem Winkel f d e, den Winkel d f e finden. 64.

5. Aufgabe. An einem scharfwinklichten Dreyeck seyen bekannt die zwey Seiten und der Winkel d f e, den Winkel f d e finden. 65.

6. Aufgabe. Wenn an dem spitzwinklichten Dreyeck alle drey Seiten bekannt, die drey Winkel finden. 65.

Dritter Abschnitt.

Von denen stumpfwinklichten Dreyecken.

1. Aufgabe. In einem stumpfwinklichten Dreyeck seyen bekannt, die zwey Winkel a b c und c b a, und die Seite a c, die Seite a b finden. 68.

2. Aufgabe. Wenn in einem stumpfwinklichten Dreyeck bekannt die Winkel a b c und a c b, und die zwischen liegende Seite b c, die Seite a c finden. 70.

3. Aufgabe. Wenn zwey Seiten und der darzwischen liegende Winkel a b c bekannt, die Seite a c finden. 70.

4. Aufgabe. Es seyen gegeben die zwey Seiten a c und b c, und der Winkel a b c, den Winkel b a c finden. 72.

5. Aufgabe. Wenn bekannt die Seiten a b, und b c, und der Winkel b a c, den Winkel a c b finden. 73.

6. Auf-

6. Aufgabe. Wenn alle drey Seiten bekannt, die drey Winkel zu finden. 74.

Anwendung der Trigonometrie bey Messung der Distanzen in der praktischen Geometrie.

1. Aufgabe. Die Distanz zweyer Oerter finden, da man zu einem nicht kommen kann. 76.

2. Aufgabe. Wenn etliche Orte in einer geraden Linie liegen, ihre Distanzen finden. 78.

3. Aufgabe. Die Weite etlicher Ortschaften, so in einer geraden Linie liegen, mittelst einer schrögen Standlinie finden. 81.

4. Aufgabe. Die Weite zweyer Oerter messen, da man zu keinem kommen kann. 85.

5. Aufgabe. Die Entfernung zweyer Oerter zu finden, zu deren keinen man kommen kann, man auch die Standlinie nicht quer gegen über, sonder hinter sich genommen werden muß. 88.

6. Aufgabe. Mit einer Linie zu welcher man nicht kommen kann, eine Parallellinie zu ziehen. 92.

7. Aufgabe. Wenn zwey Punkten, der eine diß- und der andere jenseits eines Walles lieget, auf dem Walle zwey Stäb mit denselben in gerader Linie ausstecken, und zugleich die Entfernung der zwey Punkten zu finden. 95.

8. Auf-

8. Aufgabe. Von einer Landschaft eine Carte aufnehmen. 102.

9. Aufgabe. Eine irregulare Figur welche man nur von aussen messen kann, in Grund zu legen, und deren Innhalt finden. 107.

Messung der Höhen und Tiefen.

1. Aufgabe. Die Höhe eines Thurms zu messen, welcher auf der Ebene stehet, und wo man zu dessen Fuß kommen kann. 112.

2. Aufgabe. Eine Höhe messen, welche auf einem Berg an steigenden oder fallenden Boden stehet; da man aber zu dem Punkt so unter der Spitze kommen kann. 114.

3. Aufgabe. Eine Höhe messen, welche zwar auf der Ebene stehet, aber zu deren Fuß man nicht kommen kann. 118.

4. Aufgabe. Eine Höhe messen zu deren Fuß man nicht kommen kann, und auf einem abhangenden Boden stehet. 120.

5. Aufgabe. Die Höhe eines Thurns oder eines andern Objekts messen, so auf einem Berge stehet, auf welchen man nicht kommen kann. 125.

6. Aufgabe. Die Höhe eines Thurns von einem gegenüber liegenden Gebäude zu messen. 127.

7. Aufgabe. Die Höhe eines Berges messen, mittelst einer Standlinie, welche längst dem Berge auf der Ebene hingemessen wird. 128.

8. Auf-

8. Aufgabe. Die Tiefe eines Thales zu messen. 130.

9. Aufgabe. Die Tiefe eines Grabens oder Bronnens zu messen. 132.

10. Aufgabe. Die Tiefe eines Thurns messen. 133.

Fig. 1.

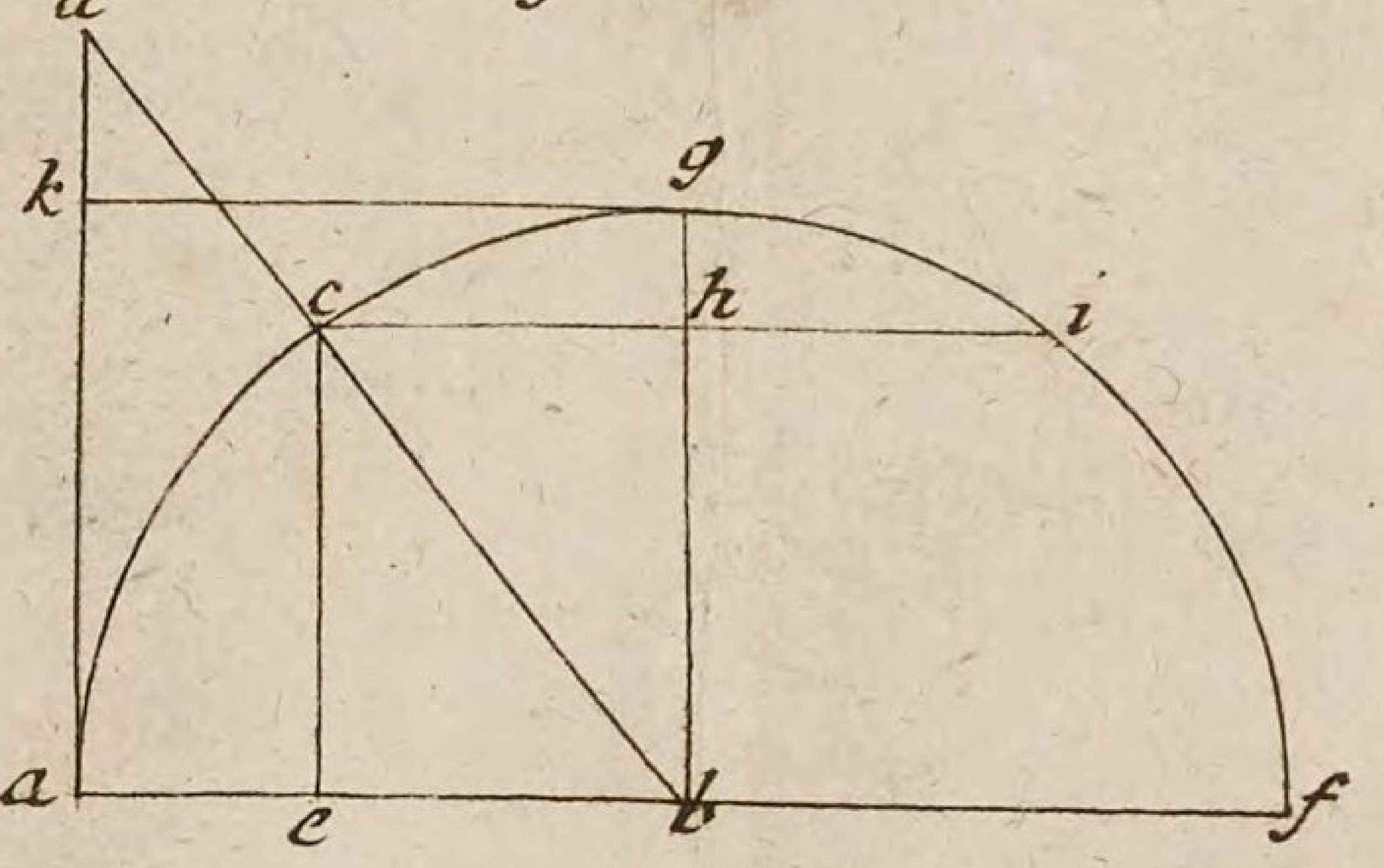


Fig. 2.

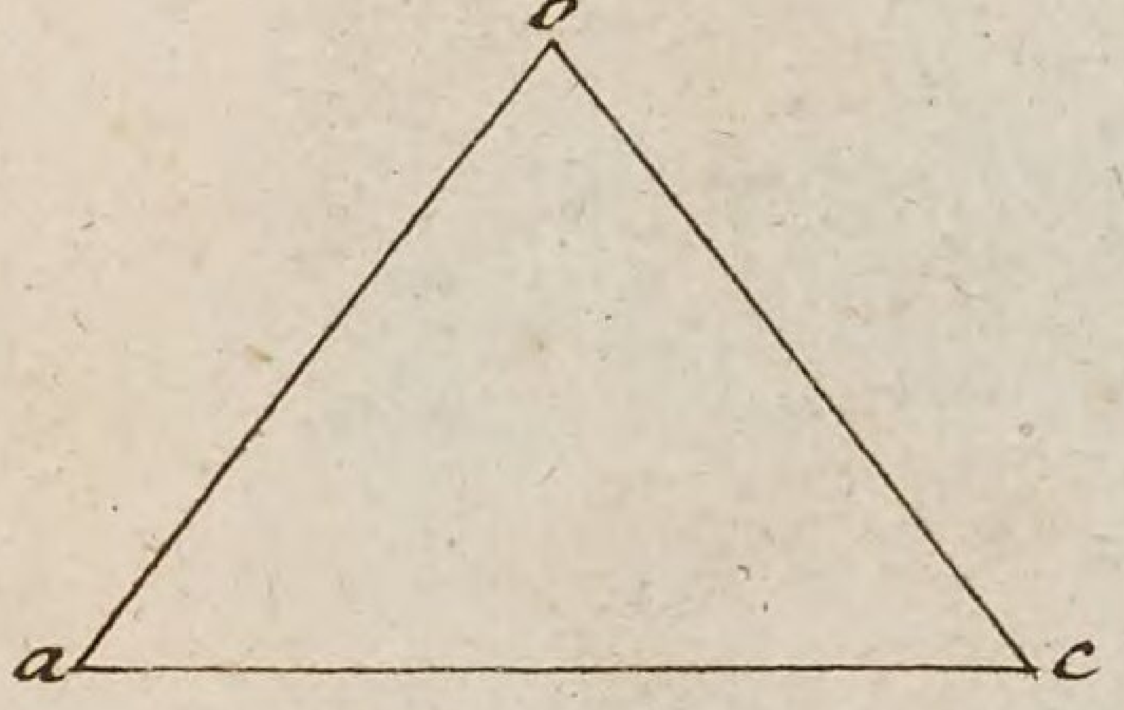


Fig. 3.

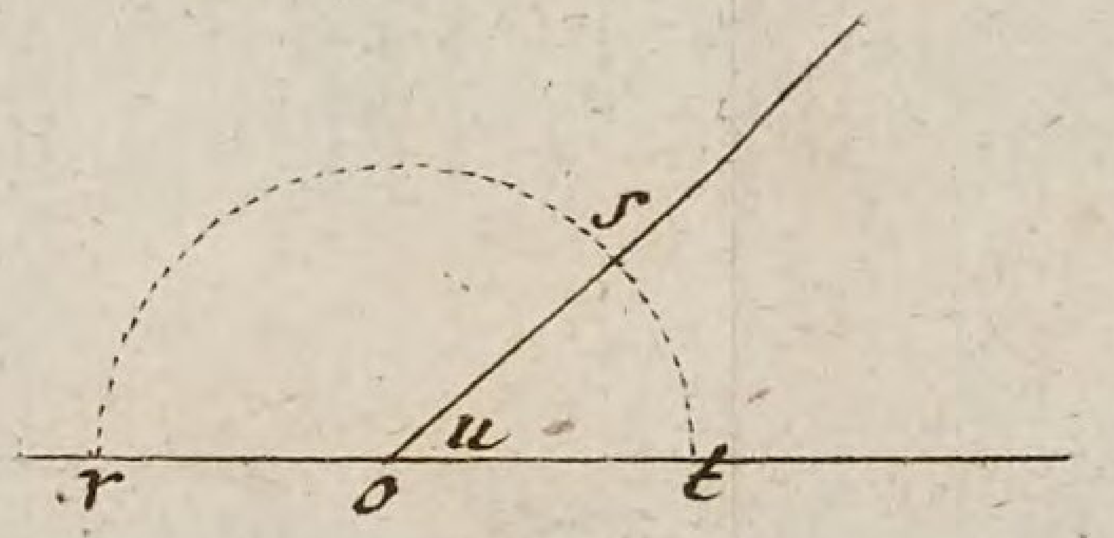


Fig. 4.

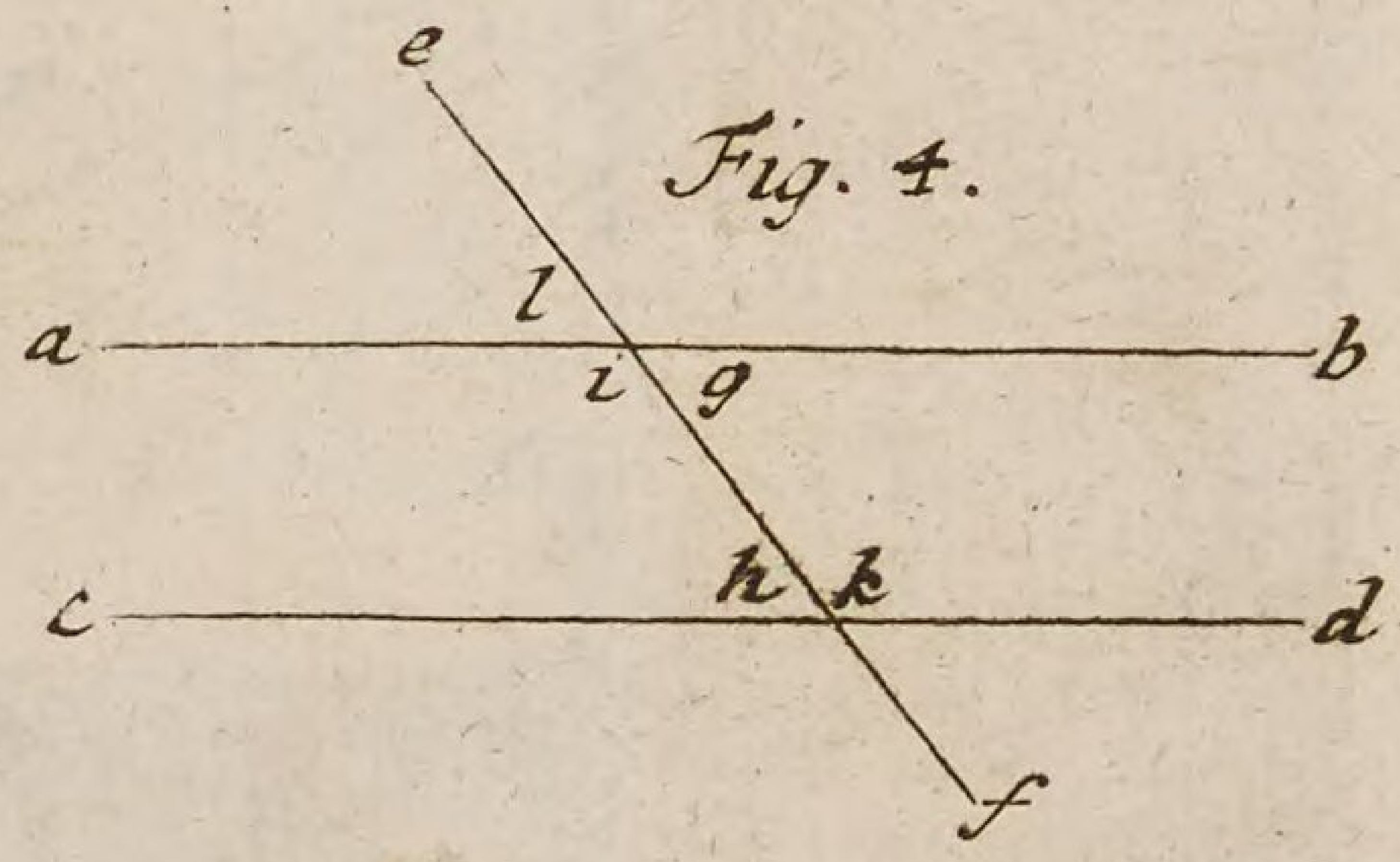


Fig. 5.

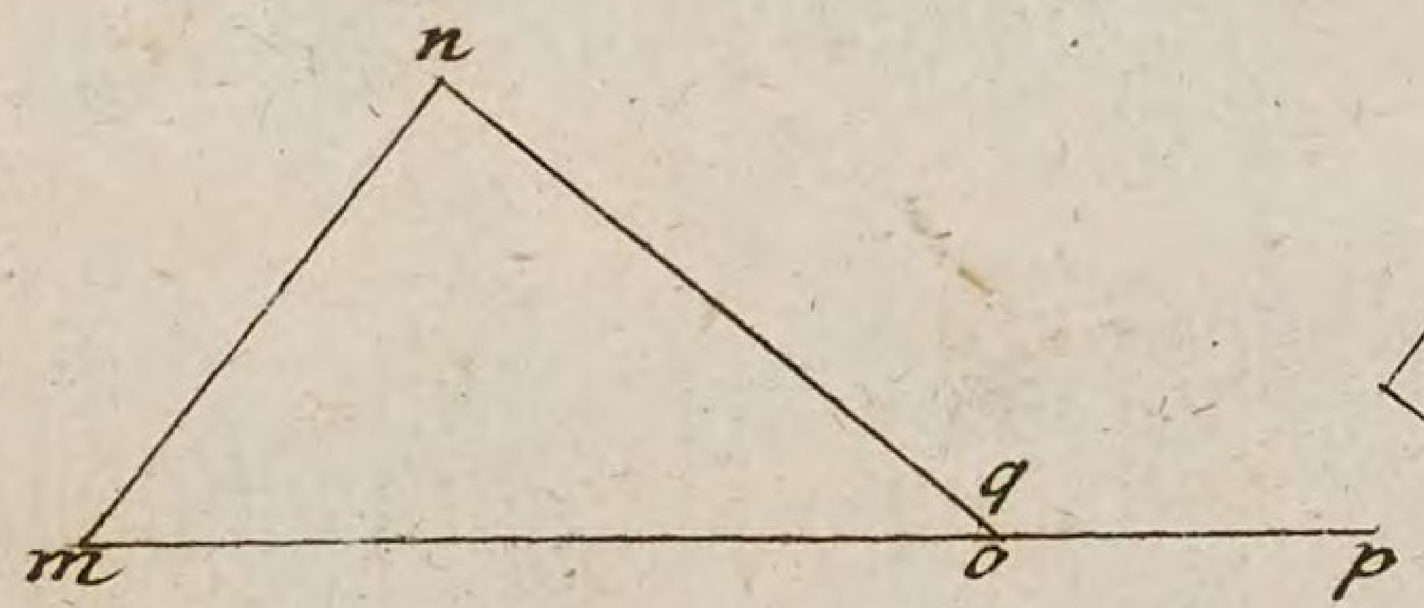


Fig. 6.

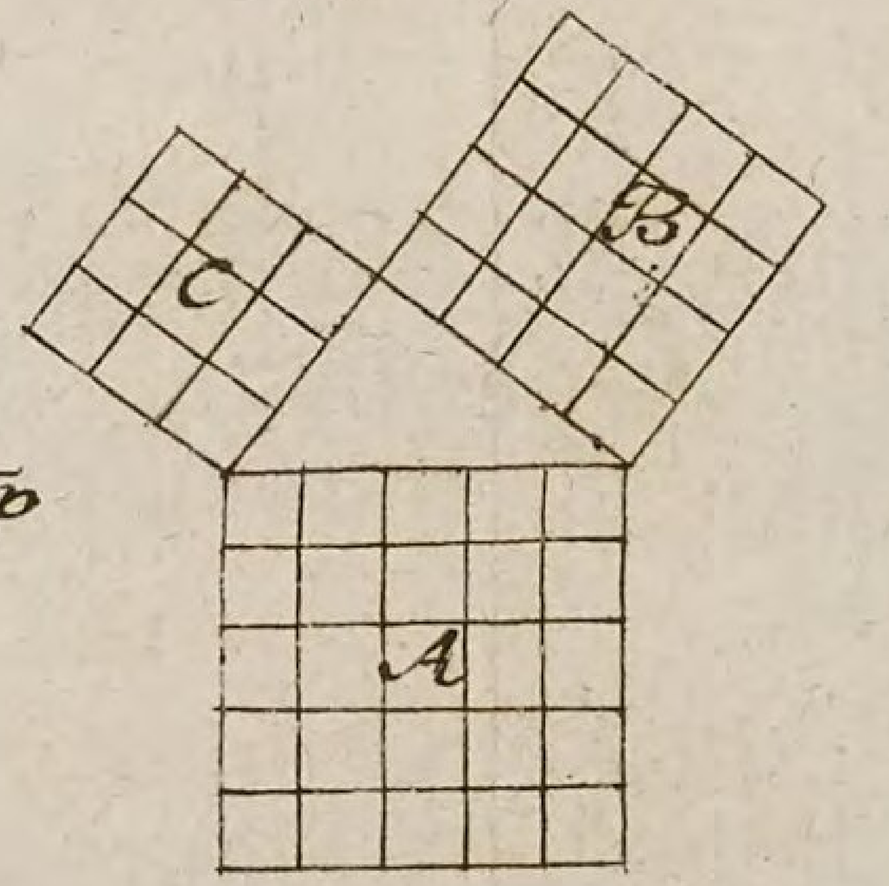


Fig. 7.

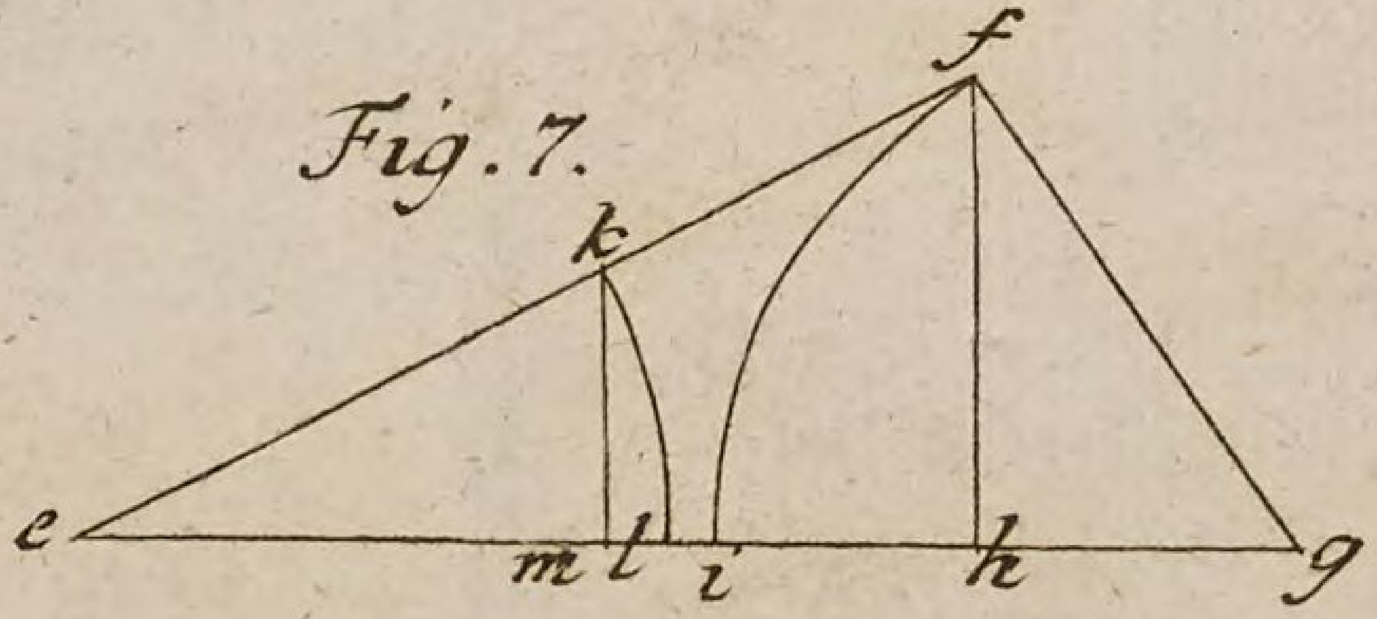


Fig. 8.

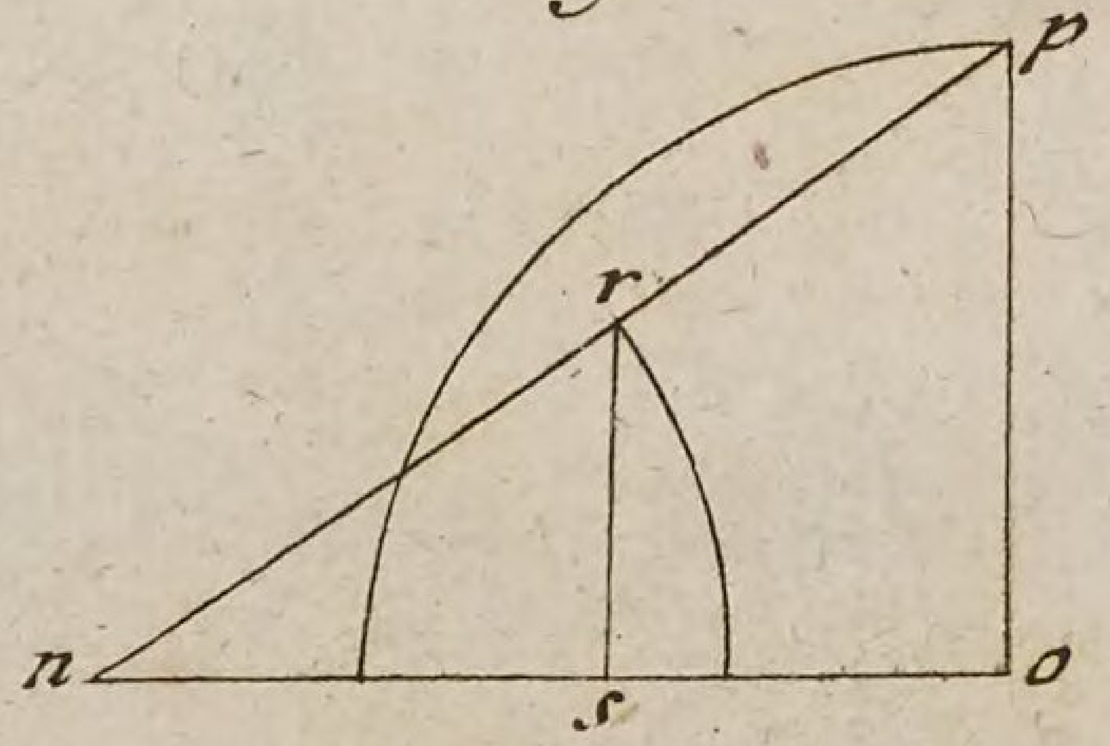
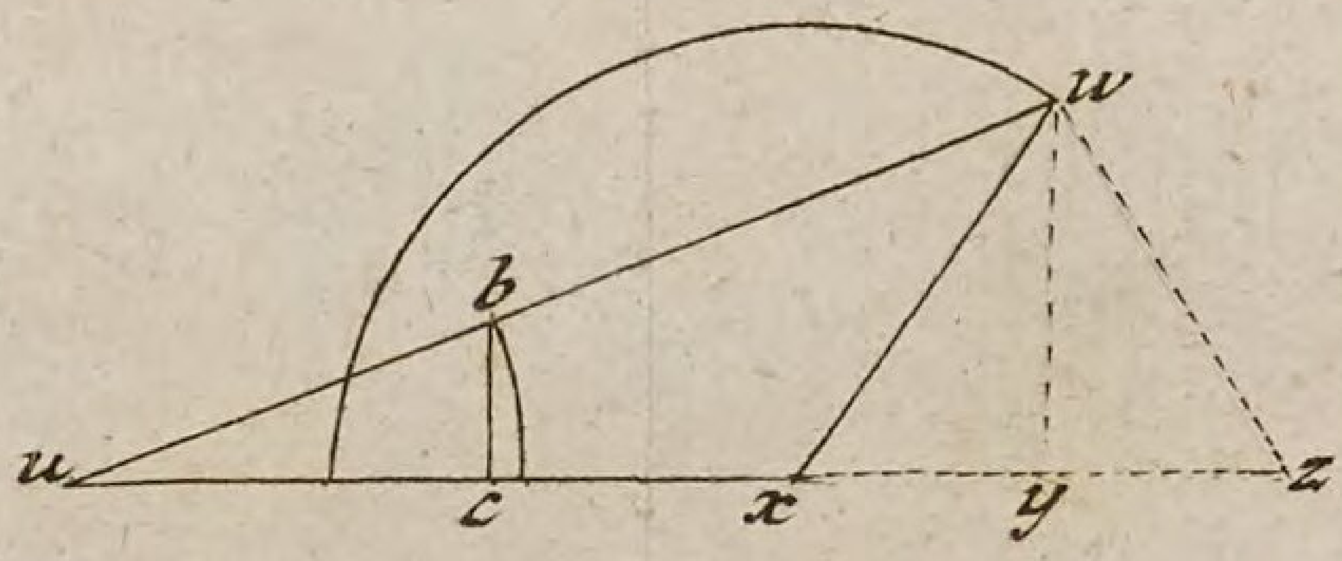


Fig. 9.



L. Voch delin.

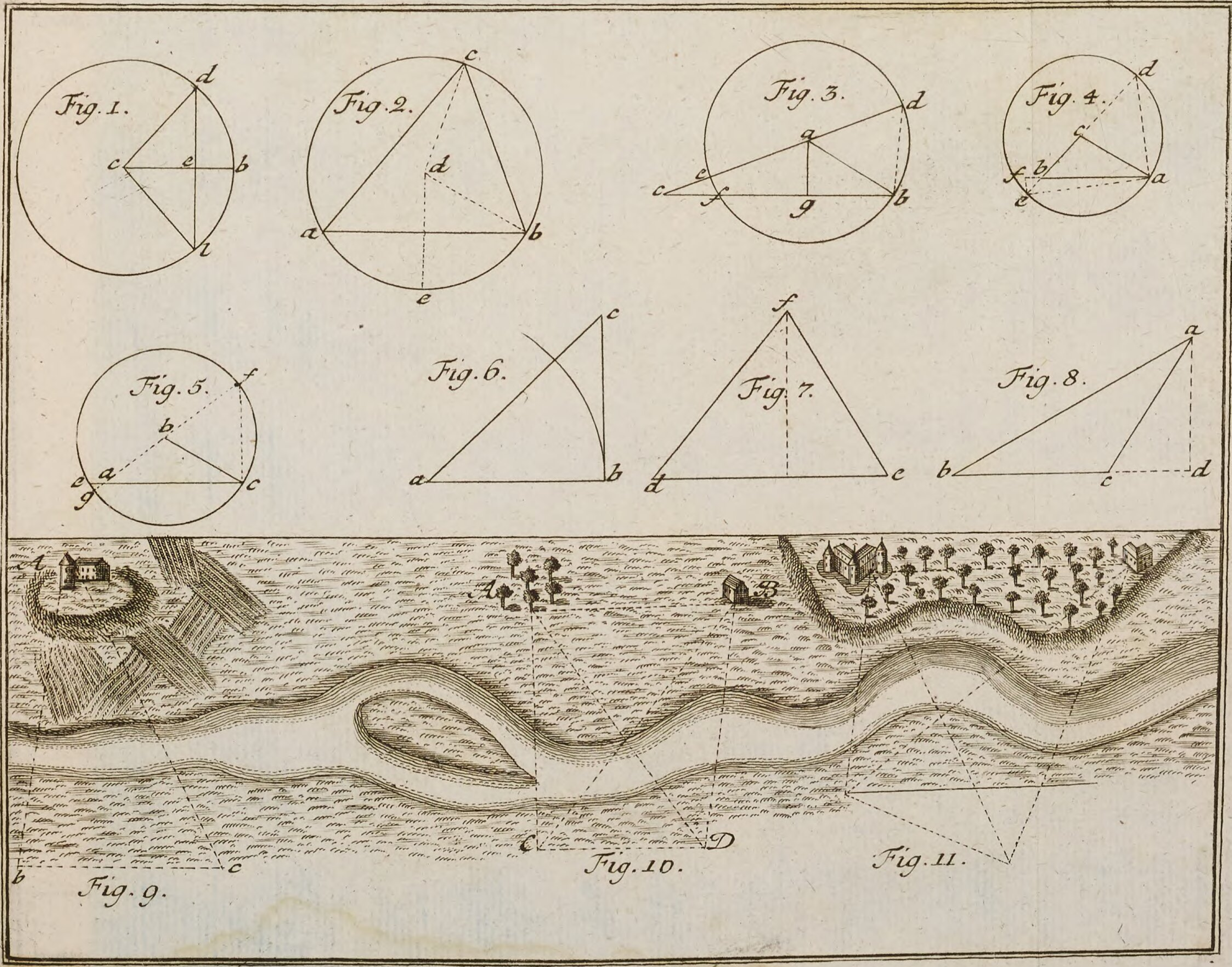
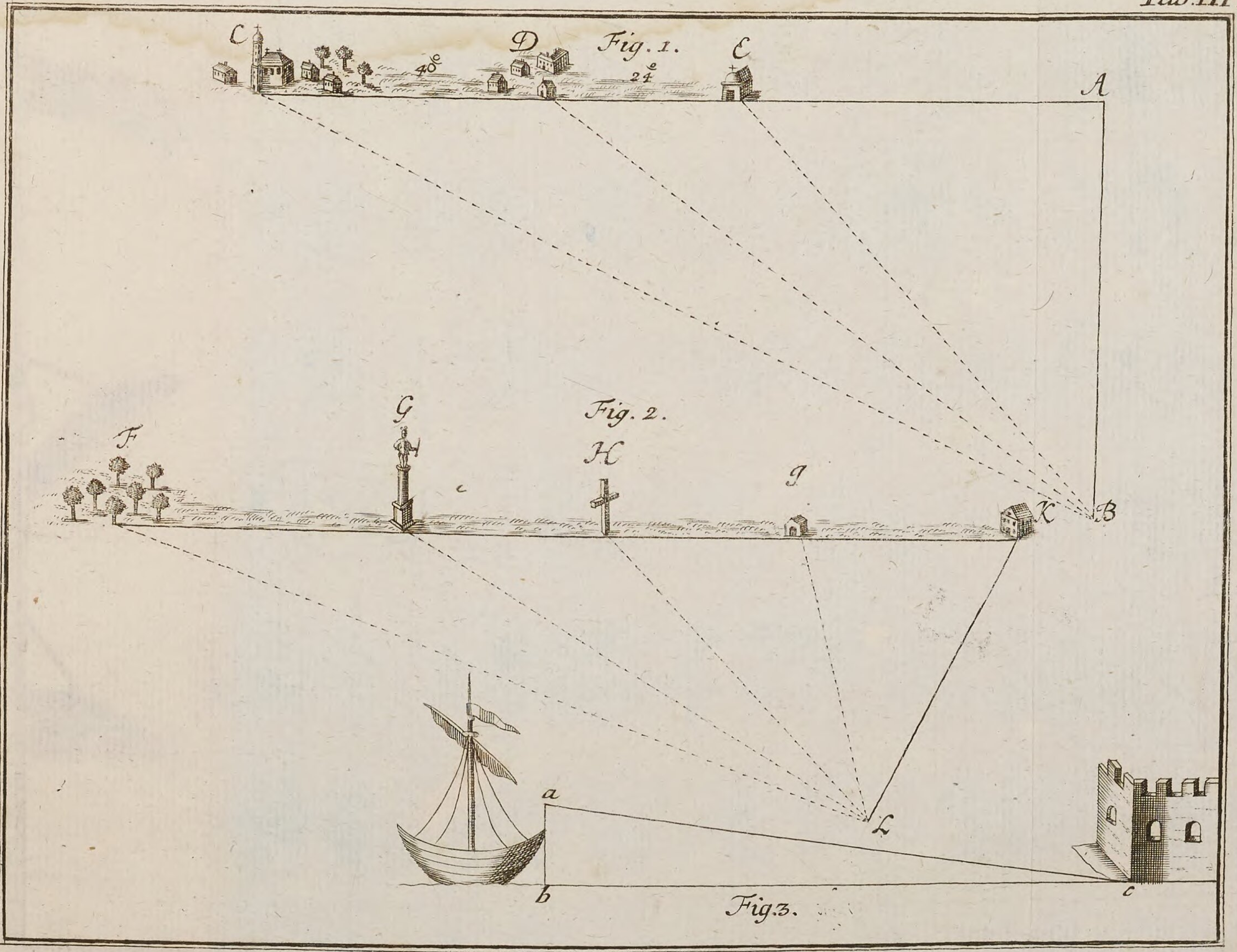
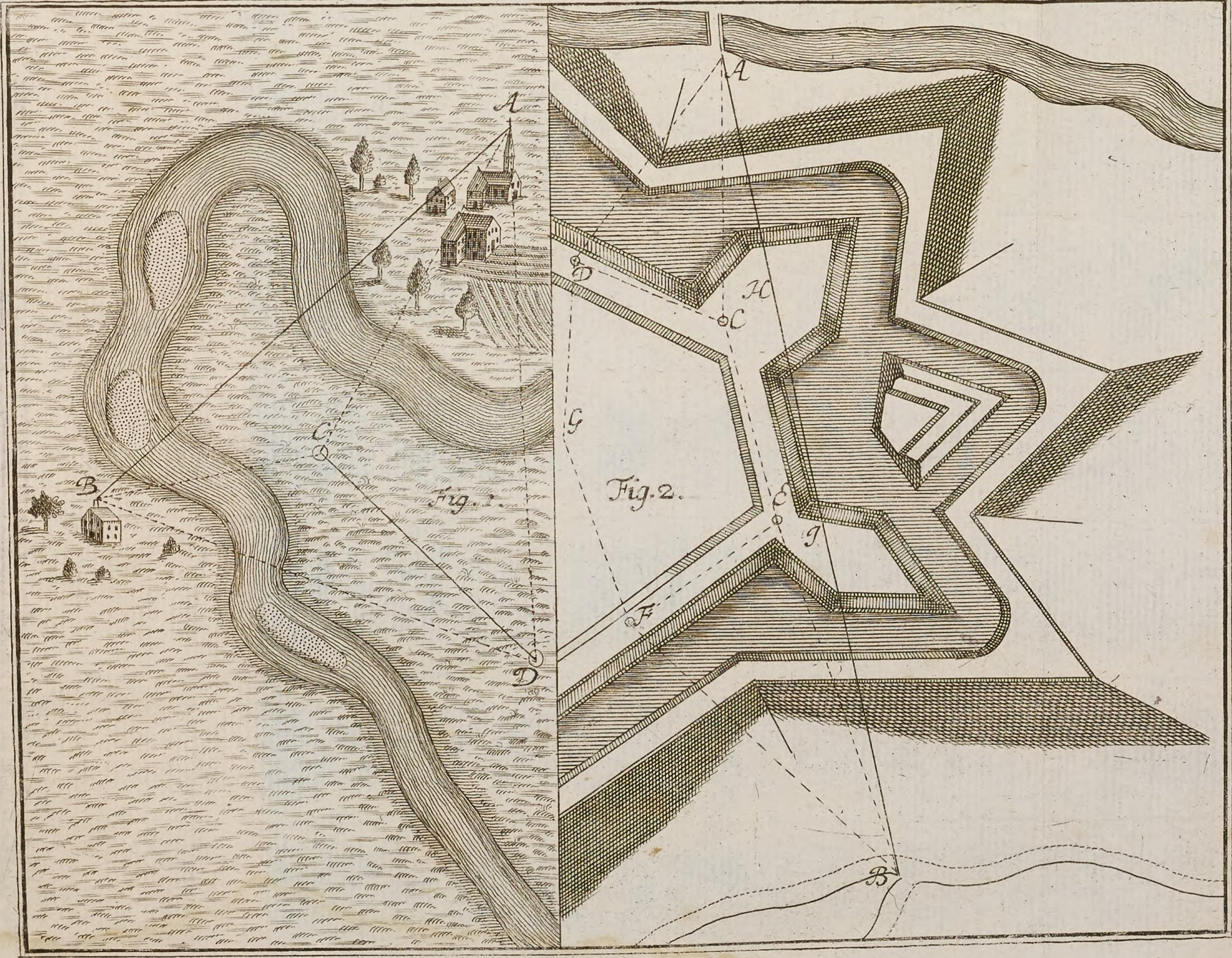


Fig. 1.
c e b d l
Fig. 2.
c d a b e
Fig. 3.
d a c e f g b
Fig. 4.
d c f b a e
Fig. 5.
f b e a g c
Fig. 6.
c a b
Fig. 7.
f d c
Fig. 8.
a b c d
A
b c
Fig. 9.
A B C D
Fig. 10.
Fig. 11.

Tab. III.




A
B
C
D
Fig. 1.
A
H
C
D
G
Fig. 2.
E
I
F
B

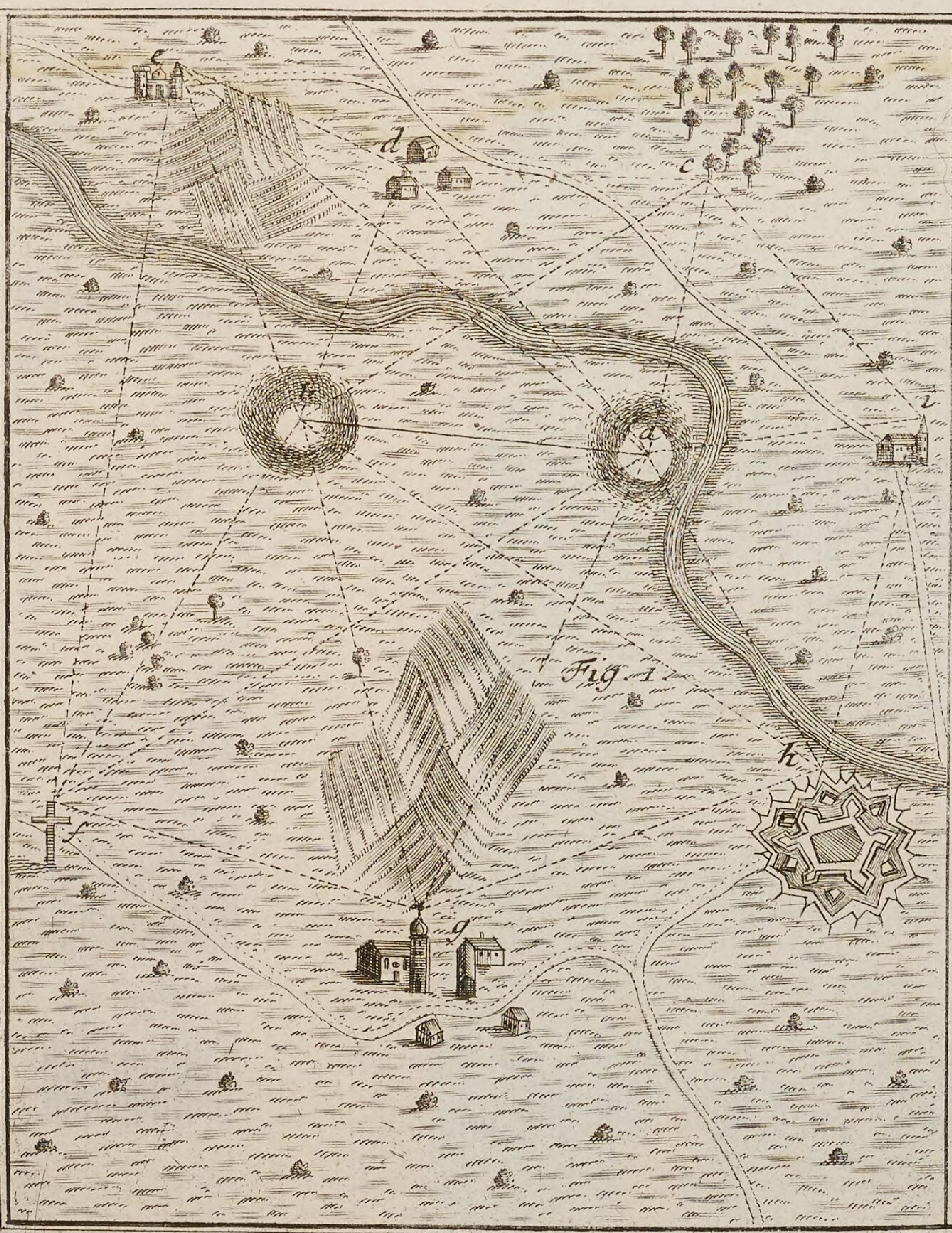
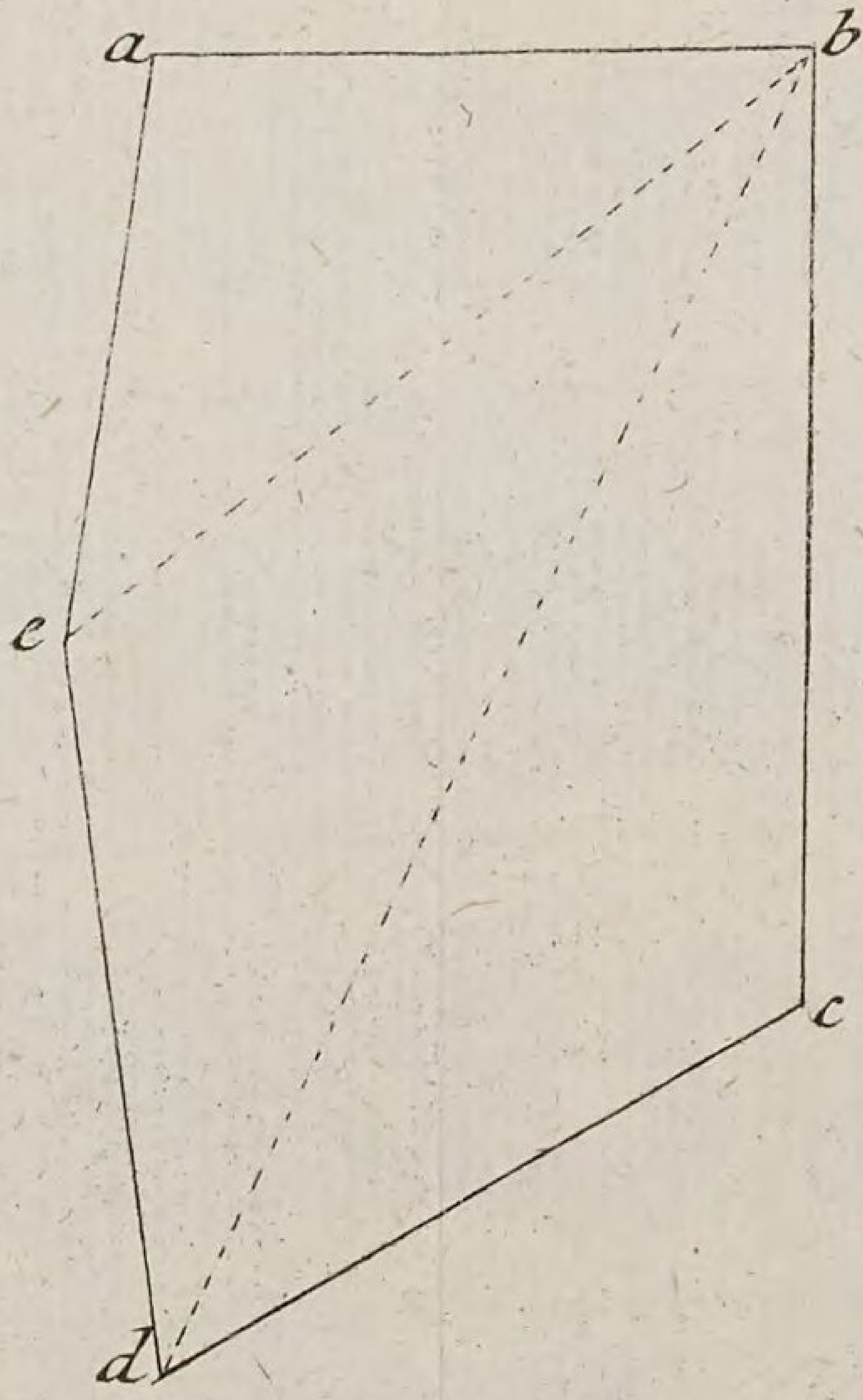


Fig. 1.

Fig. 2.



Tab. VI.

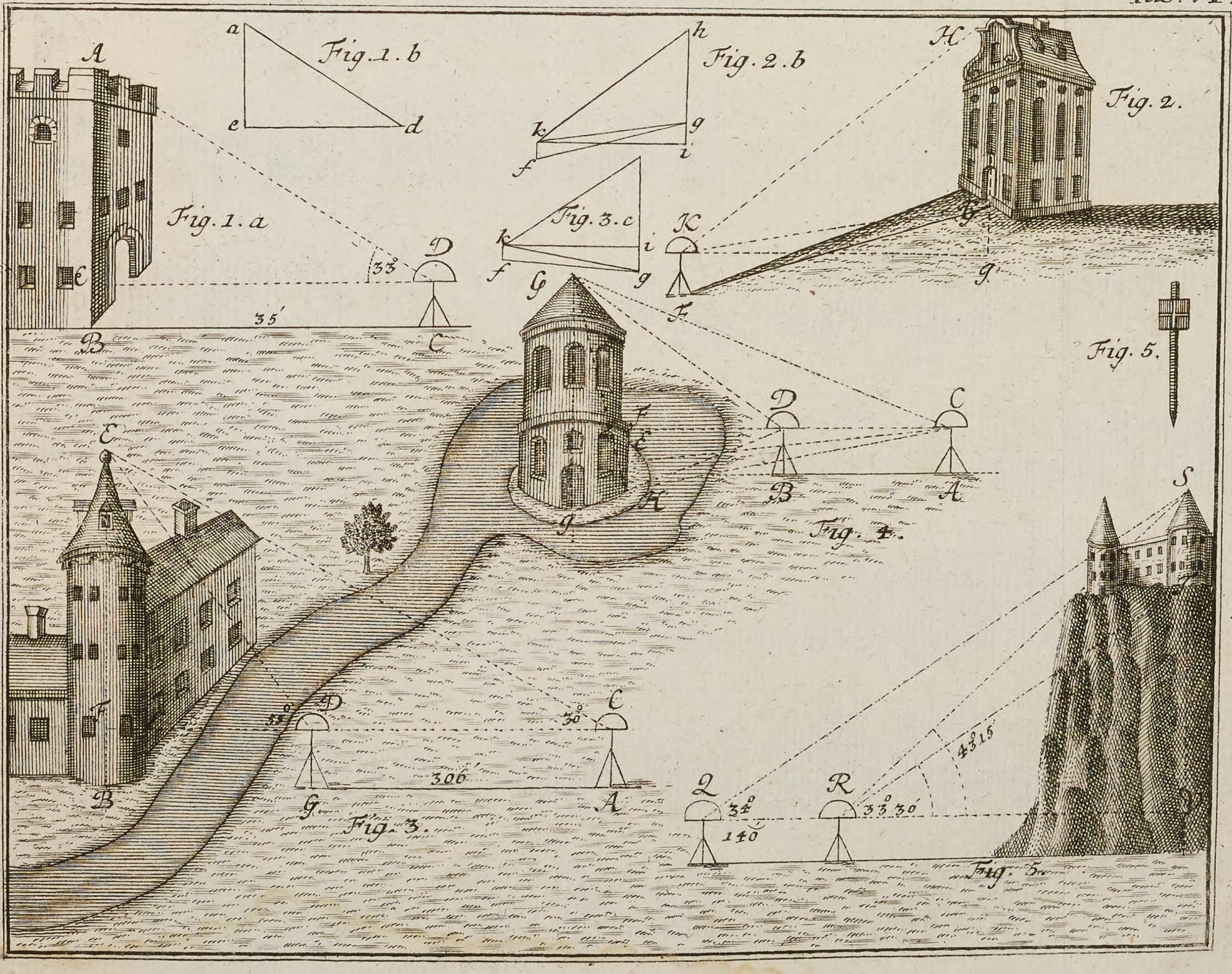


Fig. 1.

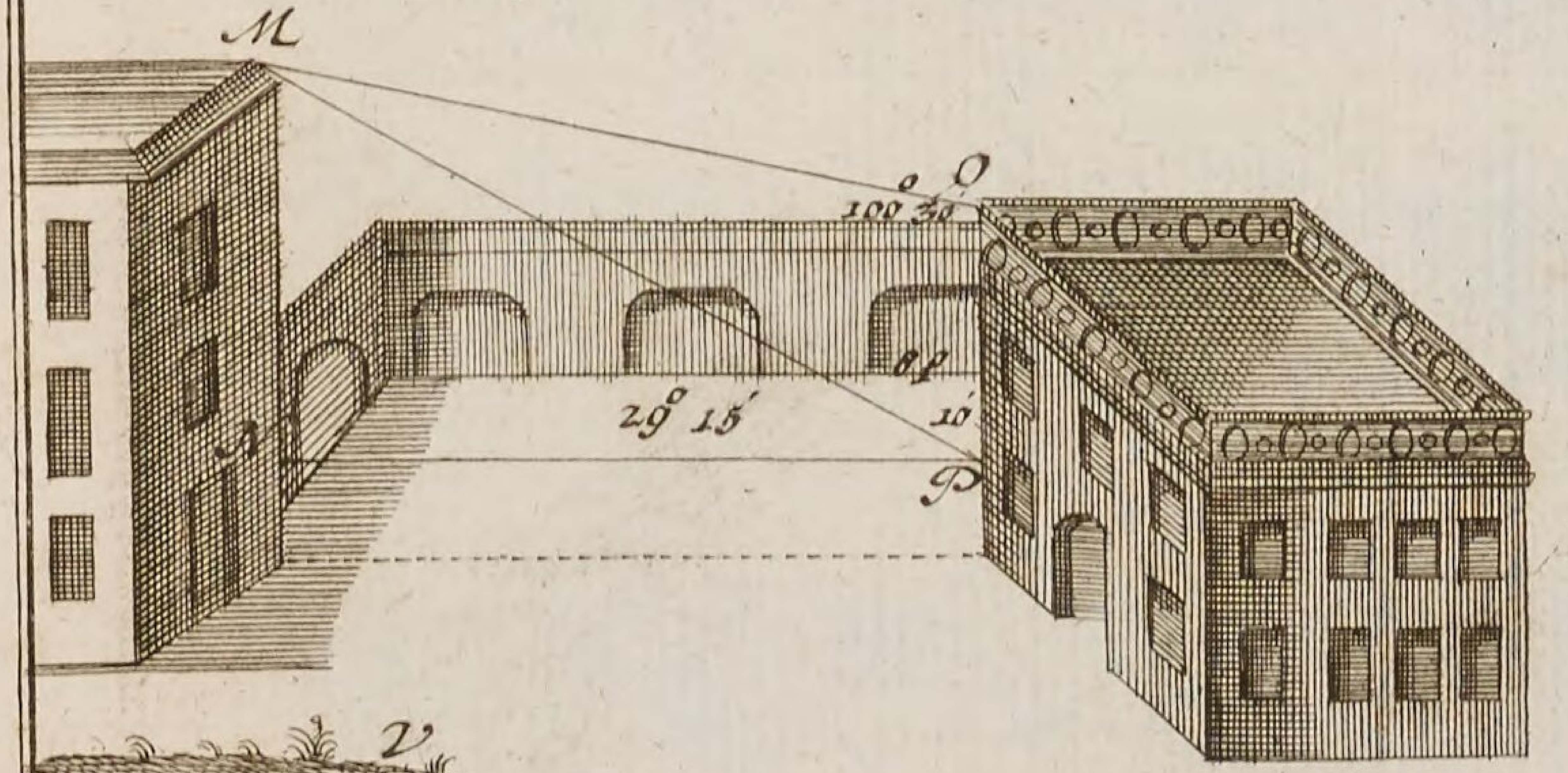


Fig. 2.

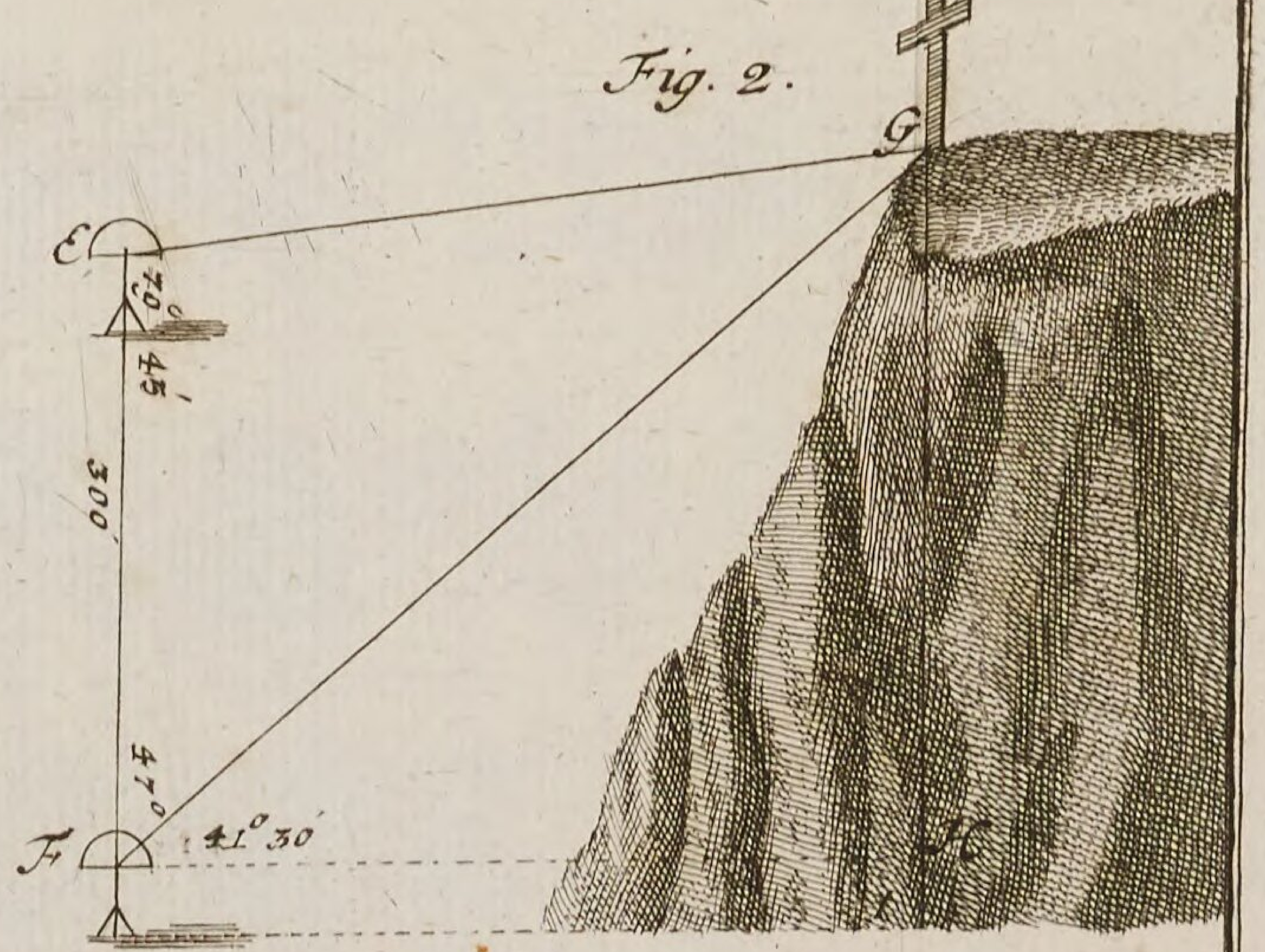


Fig. 3.

Fig. 4.

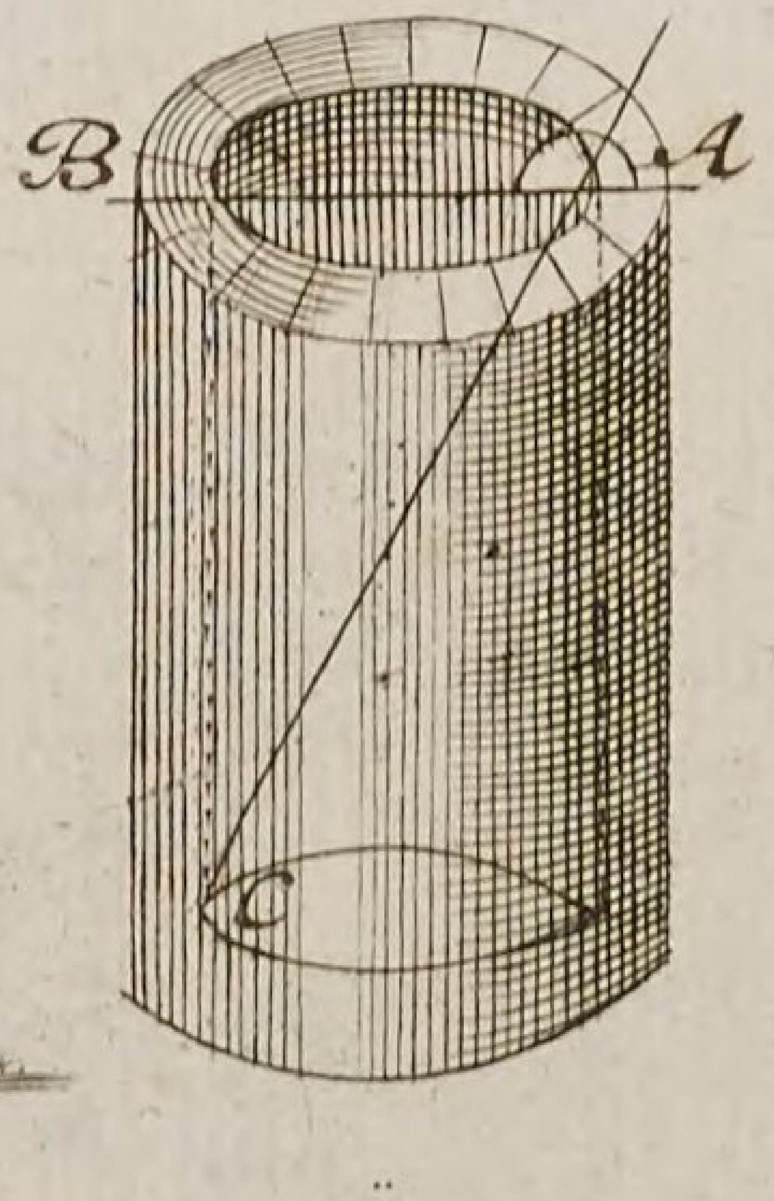
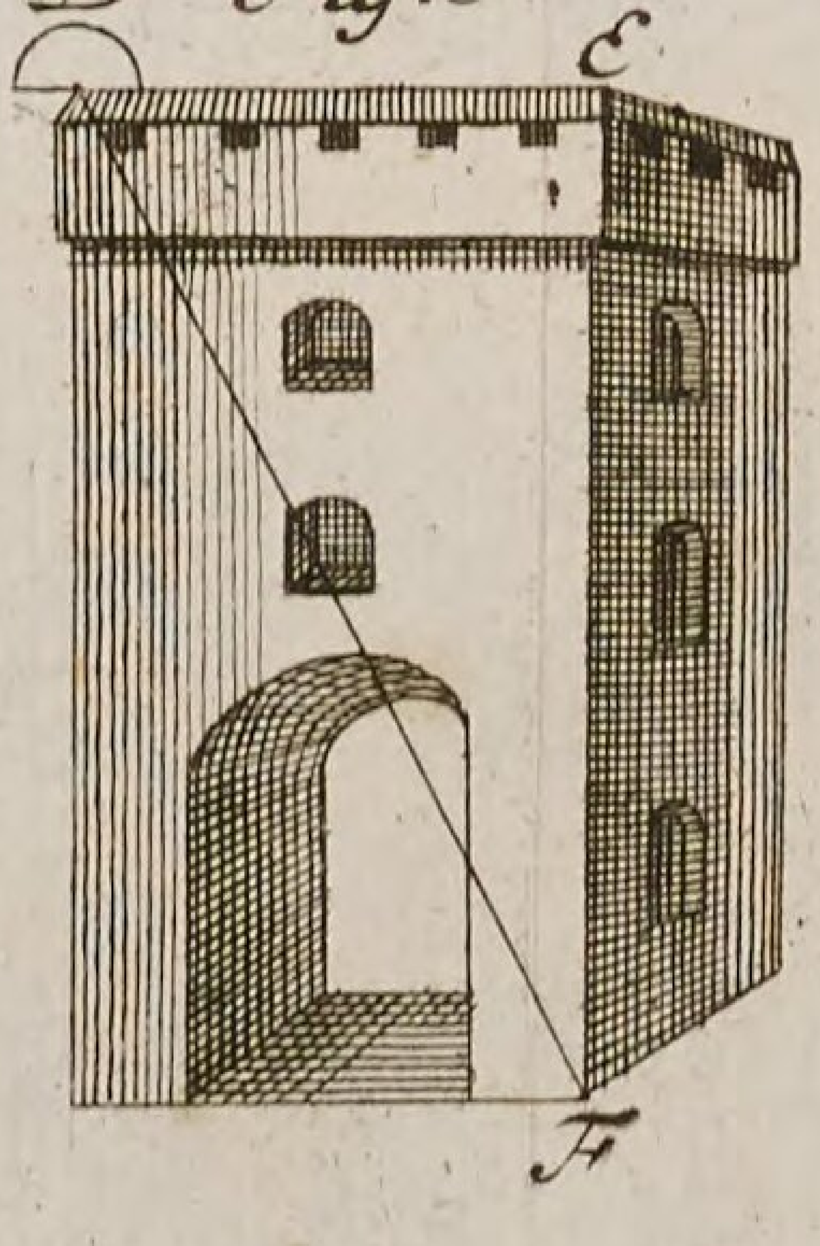


Fig. 5.



Math

Voch, Lukas,

Lukas Vochs ... Theorie und Praxis der Trigonometrie Zum Gebrauche angehender Feldmesser, Ingenieur, Architekten, Maurern, Zimmerleuten, und allen welche mit mechanischen Arbeiten umgehen, und ihre Arbeiten aus richtigen Gründen bestimmen wollen

Augsburg 1779

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- Math 1050
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11267795-3
VD18 1210602X-001